

رقم

٣١

المكان معلوم يا صبيته نكتبه

فهرست

كتاب القواء — د الجليسة
في الاعمال الجبرية

فهرست كتاب القواعد الجلية في الاعمال الجبرية

مقدمة	٢
خطبة الكتاب	٣
مقدمة	١٠
الاصطلاحات الجبرية	١٨
العمليات الجبرية	١٨
الجمع	٢٠
الطرح	٢٥
الضرب	٢٩
قوانين عمومية في الضرب	٣٦
استعمال الاقواس	٤٠
القسمة	٤٥
قابلية قسمة كثيرة الحدود على ذات الحدين بدرجة أولى	٥٣
تحليل ذات الحدود الى عوامل	٦١
الكسور الجبرية	٦٣
جمع الكسور	٦٣
طرح الكسور	٦٤
ضرب الكسور	٦٤
قسمة الكسور	٦٦
المعادلات ذات الدرجة الاولى	٧٠
حل المعادلات ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد	

مصحفة

٧٣	حل المسائل بواسطة علم الجبر
٧٤	حل مسائل ذات درجة أولى ومجهول واحد
٧٩	مسائل بدرجة أولى ومجهول واحد يطلب حلها
٨٣	حل مجموعة معادلتين بمجهولين ودرجة أولى
٩٠	مسائل محلولة بمجهولين ودرجة أولى
٩٣	مسائل بدرجة أولى ومجهولين يطلب حلها
٩٥	حل مجموعة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل ذات درجة أولى
٩٧	حل مجموعة معادلات ذات جمل بمجاهيل
١٠٥	مسائل محلولة بمجملة بمجاهيل بدرجة أولى
١٠٨	مسائل بمجملة بمجاهيل بدرجة أولى يطلب حلها
١١٠	المتباينات
١١٥	حل متباينة الدرجة الاولى
١١٧	الحلول السالبة
١١٩	حالة الاستحالة
١٢٢	حالة عدم التعيين
١٢٤	مناقشة المسائل
١٢٧	تمارين على الحلول السالبة والمستحيلة والغير معينة
١٢٨	المربع والجذر التربيعي
١٢٣	عمليات الجذور
١٢٦	ازالة بعض الجذور

صبيغة

- ١٣٨ الكميات التخيلية
- ١٤٣ المعادلات ذات الدرجة الثانية
- ١٤٤ حل معادلات الدرجة الثانية غير النامة
- ١٤٦ مسائل محلولة على معادلات الدرجة الثانية غير النامة
- ١٤٨ مسائل على معادلات الدرجة الثانية غير النامة يطلب حلها
- ١٤٩ حل المعادلة النامة ذات الدرجة الثانية
- ١٥٥ مسائل محلولة على تطبيق معادلات الدرجة الثانية النامة
- ١٥٨ مسائل على الدرجة الثانية يطلب حلها
- ١٦١ مناقشة المعادلة ذات الدرجة الثانية
- ١٦٣ الارتباط بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومكرواتها
- ١٦٧ المعادلات المضاعفة التربع
- ١٧٠ معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين
- ١٧٧ مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

كتاب

القواعد الجلية في الاعمال الجبرية

تأليف

محمد افندي ادریس

مدرس الرياضة بقسم المعلمين العربی بـمدرسة الناصرية

(جميع الحقوق محفوظة للؤلف)

الطبعة الاولى

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

س ١٣١٨ هـ
م ١٩٠٠

(بالقسم الادنى)



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بحمدك اللهم أستفتح باب المقال وبشكرك أستخ بلوغ الآمال
سبحانك جلت الأولك عن العد ووالت نعمائك فلا يقابلها شكر
أحد حدود قدرتك لا تدركها الافهام ومكررات جودك
تقصر عن حصرها الاقلام اللهم يا من أمره بين الكاف والنون
واذا أراد شيئاً أن يقول له كن فيكون نسألك من صلات صلواتك
أسئأها ومن تسنيم تسليمتك أزكأها على سيدنا محمد أس
الكأ ومنبع الخير والافصال من رفعت درجته بين المقربين
وقضت له على جميع الانبياء والمرسلين وأشرته في كتابك المين
بطه وياسين وعلى آله وأصحابه وعترته وأحبابه الذين محوا
بعزمهم جذور الشرك والفساد وارتفعت ربهم عن مساواة من
يطاولهم من العباد

(أما بعد) فلما كان علم الجبر من الفنون الجليلة القدر اذ
لا تخفى من ربه ولا تنكر فضيلته فكلم له من المأثر المرضيات

على علوم الرياضيات خصوصا في حل المشكلات واستخراج
المجهولات وكنت ممن انتدب لتدريس العلوم الرياضية للطلبة
الازهرية ورأيت شدة شغفهم بهذه العلوم وتسابقهم في
مضمار المنطوق منها والمفهوم جعلت مختصرا في هذا العلم يشرح
مسائله ويقرب مقاصده ووسائله بجاء بحمد الله وفق المرام
في هذا المقام وهو وان صغر حجمه فقد كبر غلظه والله الكريم
أسأل وبنييه الهادي أتوسل أن ينفع به الطلاب ويثيبني بقوله
أجزل الثواب وذلك في ظل من أنالنا من العلوم الاماني أفندينا
(عباس باشا حلي الثاني) أيد الله دولته وأعلى كلمته وحفظ
أنجاله الكرام بجاء النبي عليه السلام

مقدمة

(١) تعريف - الجبر هو علم يبحث فيه عن حل المسائل
العديدة بطرق مختصرة عامة

ويتوصل الى ذلك باستعمال الحروف والاشارات

(٢) استعمال الحروف - تستعمل الحروف للدلالة على الكميات
فالخروف ا، ب، ج، د، هـ، ... الخ تستعمل عادة للدلالة
على الكميات المعلومه والخروف س، ص، و، ع، ... الخ
تستعمل للدلالة على الكميات المجهولة

وقد يوضع فوق الحروف هذه العلامات (، ، ، ،) مثل ب
وب، د، و ينطق بها ب أولى وب ثانية وب ثالثة وتستعمل

للدلالة على مقادير متشابهة

وقد يوضع تحت الحروف أرقام مثل p, p, p وينطق بها ب تحتها واحد و ب تحتها ٢ و ب تحتها ٣ وتستعمل للدلالة على مقادير متشابهة

ولا تنقيد الحروف على اختلافها بمقادير خصوصية لكل حرف
(٢) استعمال الاشارات - تستعمل الاشارات للدلالة على العمليات اللازمة اجراؤها على الكميات وعلى الارتباطات الواقعة بين تلك الكميات

والاشارات الجبرية هي المستعملة في علم الحساب ولتأت بها لزيادة الايضاح فنقول

أولا + علامة الجمع ويلفظ بها زائد فكتابة $+ ٥$ تدل على لزوم جمع الكميتين ٥ و

ثانيا - علامة الطرح ويلفظ بها ناقص فكتابة $- ٥$ تدل على لزوم طرح ٥ من

ثالثا $\times ٥$ علامتنا الضرب ويلفظ بكل منهما في فكتابة $\times ٥$ و $٥ \times$ تدل على لزوم ضرب ٥ في ٥ ولا تستعمل العلامة

الثانية (٠) اذا كانت الكميات مبينة بأرقام وقد يكتب المضروبان بدون علامة فكتابة ٥ تدل على لزوم ضرب ٥ في ٥ ولا يستعمل ذلك اذا كانت الكميات مبينة بأرقام أيضا

واذا كان أحد المضروبين أو كلاهما مركبا من مجموع أو فرق كيتين أو كيات لزوم وضعه بين قوسين

فليان أن مجموع الكميتين \triangleright و \triangleleft مضروب في \triangleright يكتب
 $(\triangleright + \triangleleft)$ بوليان أن مجموع الكميات \triangleright و \triangleleft مضروب
 في الفرق بين \triangleleft و \triangleright يكتب $(\triangleright + \triangleleft)(\triangleleft - \triangleright)$
 رابعا \triangleleft أو : أو - علامات القسمة ويلفظ بكل منها على
 فكتابة $\triangleright \triangleleft$ أو : أو \triangleright تدل على لزوم قسمة \triangleright
 على \triangleleft

خامسا $\sqrt{\quad}$ علامة الجذر فكتابة $\sqrt{\quad}$ تدل على لزوم
 استخراج الجذر التربيعي لكمية \triangleright
 وإذا كان المراد استخراج الجذر التكعيبي أو الرابع أو الخامس
 وهكذا فيكتب في فحة العلامة ٣ أو ٤ أو ٥ الخ
 وهذا العدد يسمى دليل الجذر فكتابة $\sqrt[3]{\quad}$ تدل على لزوم استخراج
 الجذر الخامس لكمية \triangleright

سادسا = علامة التساوي ويلفظ بها يساوي فكتابة
 $\triangleright = \triangleleft$ تدل على أنه كمية \triangleright تساوي لمجموع \triangleleft و \triangleleft
 سابعا $> <$ علامتا التباين ويلفظ بالاولى أكبر والثانية
 أصغر

فكتابة $\triangleright < \triangleleft$ تدل على أن كمية \triangleright أكبر من \triangleleft وكتابة $\triangleleft > \triangleright$
 تدل على أن كمية \triangleleft أصغر من \triangleright

(في هاتين علامتين يكون المقدار الأكبر داخل الزاوية)
 (٤) القوة والاس - قوة الكمية هي حاصل ضرب عدة عوامل
 في بعضها مساوية لهذه الكمية

وتتميز القوى بعدد المضارب فاصل ضرب \times \div تسمى
القوة الثانية لكمية \div أو مربع \div وحاصل ضرب \times \div
 \times \div يسمى القوة الثالثة لكمية \div أو مكعب \div وحاصل
ضرب \times \div \times \div \times \div يسمى القوة الرابعة لكمية \div
وللاختصار تكتب الكمية ويكتب فوقها عدد يدل على عند
عواملها المتساوية وهذا العدد يسمى أسا

فالقوة الثانية لكمية \div تكتب \div^2 وتقرأ \div تربيع والقوة
الثالثة لهذه الكمية تكتب \div^3 وتقرأ \div تكعيب والقوة الرابعة
لها تكتب \div^4 وتقرأ \div أس ٤ والقوة الخامسة تكتب \div^5
وتقرأ \div أس ٥ وهكذا

تنبيه كل كمية ليس لها أس يعتبر الواحد -الها
(٥) المكرر - مكرر الكمية هو عدد يكتب قبل الكمية
فبدل على عدد مرات تكرارها

فكتابة ٥ ٤ تدل على ٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤

فالمكرر هو عدد مضروب في كمية

تنبيه كل كمية ليس لها مكرر يعتبر الواحد مكررا لها
(٦) ولتذكر مثالا نبين منه أن استعمال الاشارات واسطة في

الاختصار وأن استعمال الحروف واسطة في التعميم فنقول
مسئلة المطلوب تقسيم ١٢٤ بين ثلاثة أشخاص بحيث ان الاول
يأخذ زيادة عن الثاني ١٤ وان الثاني يأخذ زيادة عن

الثالث ٤

أولا نشتغل بالحل بدون استعمال اشارات ولا حروف بان نقول
 حيث ان نصيب الثاني مساو لنصيب الثالث مضافا اليه $\frac{1}{14}$
 وان نصيب الاول يساوى نصيب الثاني مضافا اليه $\frac{1}{14}$ فيكون
 نصيب الاول يساوى نصيب الثالث مضافا اليه $\frac{1}{14}$ و $\frac{1}{30}$ أى
 $\frac{1}{14}$ وحينئذ يكون $\frac{1}{194}$ مشتملا على ثلاثة أمثال نصيب
 الثالث مضافا اليه مقدار زيادة نصيب الثاني عنه وهو $\frac{1}{30}$
 ومقدار زيادة نصيب الاول عنه وهو $\frac{1}{14}$ أى مضافا اليه
 $\frac{1}{14}$ فاذا طرح $\frac{1}{74}$ من $\frac{1}{194}$ كان الباقي $\frac{1}{130}$
 مساويا لثلاثة أمثال نصيب الثالث فيكون ثلثه $\frac{1}{39}$ هو
 نصيب الثالث وأما نصيب الثاني فهو $\frac{1}{14}$ مضافا اليه
 $\frac{1}{30}$ أى $\frac{1}{70}$ ونصيب الاول $\frac{1}{70}$ مضافا اليه $\frac{1}{14}$
 أى $\frac{1}{184}$

ثانيا - نشتغل بالحل مع استعمال اشارات ولذلك نرمز لنصيب
 الثالث بحرف م فيكون

$$\text{نصيب الثالث} = م$$

$$\text{و نصيب الثاني} = م + 30$$

$$\text{و نصيب الاول} = م + 30 + 14$$

ويكون مجموع الثلاثة أنصبة يساوى 194 أى

$$م + م + 30 + 30 + م + 14 = 194 \text{ أو}$$

$$3م + 74 = 194 \text{ فاذا طرحنا من طرفي هذه}$$

المتساوية 74 ينتج

$$٣ = ١٢٠ \text{ أو}$$

$$٤٠ = ٣$$

أعني أن نصيب الثالث $\frac{١}{٣}$ وحيث يكون نصيب الثاني $\frac{١}{٢}$

$$\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦} \text{ ونصيب الاول } \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}$$

ثالثا - نشغل بالحل مع استعمال اشارات وحروف بدل المعاليم
فنعول

ليكن المطلوب تقسيم العدد $ح$ على ثلاثة أشخاص بحيث أن
الثاني يأخذ زيادة عن الثالث بقدر $د$ والاول يأخذ زيادة عن
الثاني بقدر $هـ$

فنفرض أن نصيب الثالث $س$ فيكون

$$\text{نصيب الثالث} = س$$

$$\text{و } « \text{ الثاني} = س + د$$

$$\text{و } « \text{ الاول} = س + د + هـ$$

ويكون مجموع الثلاثة أنصبة يساوي $ح$ أي

$$س + س + د + س + د + هـ = ح \text{ أو}$$

$$٣س + ٢د + هـ = ح \text{ فإذا طرح من طرفي هذه}$$

المساوية $٢د + هـ$ يحدث

$$٣س = ح - ٢د - هـ \text{ وبقسمة الطرفين على } ٣ \text{ ينتج}$$

$$س = \frac{ح - ٢د - هـ}{٣}$$

أعني أنه لايجبلا مقدار نصيب الثالث يطرح على المتوالى من

العدد المراد تقسيمه ضعف زيادة الثاني عن الثالث ثم زيادة الاول

عن الثاني ويقسم الباقي على ٣
أما نصيب كل من الأول والثاني فنقسم معرفته بعد معرفة نصيب
الثالث

وبالتأمل في هذه الحلول الثلاثة يرى أن الحل الأول (الذي لم تستعمل
فيه اشارات ولا حروف فيه صعوبة وتطويل - وإن الحل الثاني
(الذي استعمل فيه اشارات وحرف رمز للجهول) فيه سهولة
واختصار وكلا الحلين غير عام بحيث لو فرضنا مسألة أخرى مثل
المسألة السابقة ومغايرة لها في المقادير العددية لالتزمنا أن نعيد
كل ما تقدم - ويرى أن الحل الثالث (الذي استعملت فيه اشارات
وحروف رموزا للعالم والمجاهيل) سهل ومختصر ويقام بحيث أن
يمكن تطبيق النتائج الأخيرة على أي مسألة مشابهة لهذه
(٧) القانون الجبري - هو وضع مابين العمليات اللازم اجراؤها
لتعريف مقدار مجهول في مسألة متى كانت الكميات المعروفة
مبينة بحروف

وذلك مثل القانون السابق ومثل القانون

س = ط + س

الذي فيه س رمز لسطح الدائرة و ط رمز للنسبة النقرية
وس رمز نصف القطر

تمارين

(١٠) اقرأ الكميات $٥٠ + ٤٠ - ٦٠ - ٢٠ - ٣٠ - ٤٠$

$$5 + 7 = 12 \text{ } 6 \text{ } - \frac{7}{2} 6$$

(٢) بين أن الكميات h و g و f مضافة الى بعضها وكذا

۳۶۲۶۵

(۳) بین أن كمية ح يرا د طرحها من د + ه و كمية ه + ل

براد طرَحها من ع

(٤) بين أن المراد ضرب ح في د^٢ ٦ سه^٢ في صه^٣ ٥ ٦ في ٧

(٥) بين أن المراد ضرب مجموع الكينسين ح' و د' في الفرق

باعتها

(٦) بين أن المراد قسمة ٦٦ على ٦ و ٦ على ٦ .

عليه + و

(٧) بين القوة الخامسة لكمية α والسابعة لكمية λ والجذر

السابع لكمية ٥

(٨) أضف دأ الى خارج قسمة هـ على و واضرب الحاصل في حـ

(٩) ما الفرق بين ٣ > ٦ و ٦ > ٣ وبين ٢ ل ه ٦ ل ه ؟

(١٠) بين انه اذا ضرب ح في د وطرح من الناتج هـ وقسم

الباقى على ل يكون الخارج مساويا لكمية ص

الاصطلاحات الجبرية

(٨) الكميات السالبة - متى كانت الكمية المسراد طرحها

أكبر من الكمية المراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير

ممكنة لكن إيمان الناتج قد اتفق في علم الجبر على طرح الكمية

الصغرى من الكبرى ووضع علامة - أمام الناتج
 فإذا أريد طرح ٧ من ٥ كانت العملية غير ممكنة وعلى حسب
 الاتفاق المذكور يطرح ٥ من ٧ ينتج ٢ ويوضع أمامه علامة -
 فيحدث - ٢ ويكون ٥ - ٧ = - ٢
 وكذا إذا أريد طرح ٩ من ٥ يطرح خمسة أمثال ٥ من
 تسعة أمثالها فيبقى أربعة أمثال ٥ ويكون
 ٥ ٥ - ٩ = - ٤

وكل من المقدارين - ٢ ٥ - ٤ يسمى كمية سالبة
 وينتج من ذلك أن الكمية السالبة هي الكمية المسبوقة بعلامة
 - وهي نتيجة عملية طرح غير ممكنة
 أما الكميات المسبوقة بعلامة + فتسمى كميات موجبة وكل
 كمية غير مسبوقة بعلامة هي أيضا موجبة فتعتبر أنها مسبوقة
 بعلامة +

(٩) مقادير الكميات السالبة - إذا طرح من عدد مثلي ٨
 على التوالي الأعداد ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و ١١ و ١٢ و ١٣ الخ
 (مع مراعاة القاعدة السابقة) توجد على التوالي البواقي ٣
 و ٢ و ١ و ٠ ثم ١ - ٢ و ٣ - ٢ و ٤ - ٣ و ٥ - ٤ الخ
 وحيث أنه كلما زاد المطروح نقص الباقي فينتج أن ١ أقل
 من الصفر وان ٢ أقل من ١ - ٣ أقل من ٢ - ٤ أقل من ٣
 - وهكذا

أعني أن مقادير الكميات السالبة أقل من الصفر وان أصغر

الكميتين الساليتين ما كان مقدارها المطلق أكبر

(١٠) المقدار الجبري - كل وضع جبري يستدل به على عملية

أو عدة عمليات جبرية يسمى مقداراً جبرياً

مثلاً $3 > 2$ و $6 > 5$ و $9 > 8$ و $12 > 11$ و $15 > 14$ و $18 > 17$ و $21 > 20$ و $24 > 23$ و $27 > 26$ و $30 > 29$ و $33 > 32$ و $36 > 35$ و $39 > 38$ و $42 > 41$ و $45 > 44$ و $48 > 47$ و $51 > 50$ و $54 > 53$ و $57 > 56$ و $60 > 59$ و $63 > 62$ و $66 > 65$ و $69 > 68$ و $72 > 71$ و $75 > 74$ و $78 > 77$ و $81 > 80$ و $84 > 83$ و $87 > 86$ و $90 > 89$ و $93 > 92$ و $96 > 95$ و $99 > 98$ و $102 > 101$ و $105 > 104$ و $108 > 107$ و $111 > 110$ و $114 > 113$ و $117 > 116$ و $120 > 119$ و $123 > 122$ و $126 > 125$ و $129 > 128$ و $132 > 131$ و $135 > 134$ و $138 > 137$ و $141 > 140$ و $144 > 143$ و $147 > 146$ و $150 > 149$ و $153 > 152$ و $156 > 155$ و $159 > 158$ و $162 > 161$ و $165 > 164$ و $168 > 167$ و $171 > 170$ و $174 > 173$ و $177 > 176$ و $180 > 179$ و $183 > 182$ و $186 > 185$ و $189 > 188$ و $192 > 191$ و $195 > 194$ و $198 > 197$ و $201 > 200$ و $204 > 203$ و $207 > 206$ و $210 > 209$ و $213 > 212$ و $216 > 215$ و $219 > 218$ و $222 > 221$ و $225 > 224$ و $228 > 227$ و $231 > 230$ و $234 > 233$ و $237 > 236$ و $240 > 239$ و $243 > 242$ و $246 > 245$ و $249 > 248$ و $252 > 251$ و $255 > 254$ و $258 > 257$ و $261 > 260$ و $264 > 263$ و $267 > 266$ و $270 > 269$ و $273 > 272$ و $276 > 275$ و $279 > 278$ و $282 > 281$ و $285 > 284$ و $288 > 287$ و $291 > 290$ و $294 > 293$ و $297 > 296$ و $300 > 299$ و $303 > 302$ و $306 > 305$ و $309 > 308$ و $312 > 311$ و $315 > 314$ و $318 > 317$ و $321 > 320$ و $324 > 323$ و $327 > 326$ و $330 > 329$ و $333 > 332$ و $336 > 335$ و $339 > 338$ و $342 > 341$ و $345 > 344$ و $348 > 347$ و $351 > 350$ و $354 > 353$ و $357 > 356$ و $360 > 359$ و $363 > 362$ و $366 > 365$ و $369 > 368$ و $372 > 371$ و $375 > 374$ و $378 > 377$ و $381 > 380$ و $384 > 383$ و $387 > 386$ و $390 > 389$ و $393 > 392$ و $396 > 395$ و $399 > 398$ و $402 > 401$ و $405 > 404$ و $408 > 407$ و $411 > 410$ و $414 > 413$ و $417 > 416$ و $420 > 419$ و $423 > 422$ و $426 > 425$ و $429 > 428$ و $432 > 431$ و $435 > 434$ و $438 > 437$ و $441 > 440$ و $444 > 443$ و $447 > 446$ و $450 > 449$ و $453 > 452$ و $456 > 455$ و $459 > 458$ و $462 > 461$ و $465 > 464$ و $468 > 467$ و $471 > 470$ و $474 > 473$ و $477 > 476$ و $480 > 479$ و $483 > 482$ و $486 > 485$ و $489 > 488$ و $492 > 491$ و $495 > 494$ و $498 > 497$ و $501 > 500$ و $504 > 503$ و $507 > 506$ و $510 > 509$ و $513 > 512$ و $516 > 515$ و $519 > 518$ و $522 > 521$ و $525 > 524$ و $528 > 527$ و $531 > 530$ و $534 > 533$ و $537 > 536$ و $540 > 539$ و $543 > 542$ و $546 > 545$ و $549 > 548$ و $552 > 551$ و $555 > 554$ و $558 > 557$ و $561 > 560$ و $564 > 563$ و $567 > 566$ و $570 > 569$ و $573 > 572$ و $576 > 575$ و $579 > 578$ و $582 > 581$ و $585 > 584$ و $588 > 587$ و $591 > 590$ و $594 > 593$ و $597 > 596$ و $600 > 599$ و $603 > 602$ و $606 > 605$ و $609 > 608$ و $612 > 611$ و $615 > 614$ و $618 > 617$ و $621 > 620$ و $624 > 623$ و $627 > 626$ و $630 > 629$ و $633 > 632$ و $636 > 635$ و $639 > 638$ و $642 > 641$ و $645 > 644$ و $648 > 647$ و $651 > 650$ و $654 > 653$ و $657 > 656$ و $660 > 659$ و $663 > 662$ و $666 > 665$ و $669 > 668$ و $672 > 671$ و $675 > 674$ و $678 > 677$ و $681 > 680$ و $684 > 683$ و $687 > 686$ و $690 > 689$ و $693 > 692$ و $696 > 695$ و $699 > 698$ و $702 > 701$ و $705 > 704$ و $708 > 707$ و $711 > 710$ و $714 > 713$ و $717 > 716$ و $720 > 719$ و $723 > 722$ و $726 > 725$ و $729 > 728$ و $732 > 731$ و $735 > 734$

المقدار الجبري يكون جذريا اذا لم يشتمل على علامة جذر

فان اشتمل على علامة حذريه غير حذري

فالمقدار ۳ ح^۲ و جذری والمقدار ۷ ح^۲ و غیر جذری

المقدار الجبرى يكون ~~محصا~~ اذا لم يشتمل على مقام حرفى فان

اشتمل علی مقام حرفی یہی کسریا

فالقدر ح^ا و يسمى مقدارا صحيحا والمقدار ح^ب يسمى كذريا

(۱۱) الحد - كل مقدار جبري لم يتخلله احدى العلامتين +

6 - یسعی خدا مثل $6 \times 6 = 36$

(١٢) درجة الحد الصحيح - هي مجموع أسس حروفه

فدرجة الحد ٨ هـ هي الثانية ودرجة الحد ٩ هـ هي الخامسة

تعبيره - هذه هي الدرجة المطلقة وأما درجة الحد بالنسبة

الحرف فهي درجة ذلك الحرف فدرجة الحاء α ح^٢ و α هـ بالنسبة

الى ٢ هي الثانية وبالنسبة الى ٤ هي الثالثة وبالنسبة الى ٥

هي الاولى

(١٣) كثيرة الحدود - هي كمية مركبة من عدة حدود

فإذا تركبت من حدين سميت ذات الحدين وإذا تركبت من ثلاثة

حدود سميت ذات الثلاثة حدود وهكذا

فالكمية ح^٢ + د ذات حدين والكمية ح^٣ - ح^٢ - ح^٢ - د هـ
ذات ثلاثة حدود

والكمية ١٥ ح^٢ - د^٢ - ٤ ح^٢ هـ^٢ + ٦ هـ^٢ - و - ٥ م ذات
أربعة حدود

(١٤) درجة كثيرة الحدود - هي أكبر درجات حدودها
فدرجة كثيرة الحدود ٥ ح^٢ - د^٢ - ٣ ح^٢ - د^٢ + ٤ ح^٢ - د^٢ -
٥ ح^٢ - د^٢ هي التاسعة

تنبية - هذه هي الدرجة المطلقة وأما درجتها بالنسبة لحرف
فهى أعظم درجة فيها له - هذا الحرف

فدرجة الكمية السابقة بالنسبة الى ح هي الرابعة
(١٥) كثيرة الحدود المتجانسة - هي ما اتحدت درجة جميع
حدودها

وتسمى هذه الدرجة بدرجة المتجانس

مثلا كثيرة الحدود ٥ س^٤ + ٨ ح^٢ س^٣ - ١٢ ح^٢ س^٢
+ ٩ ح^٢ س - ٦ ح^٢ متجانسة بدرجة رابعة

(١٦) الحدود المتشابهة - هي حدود ذات حروف واحدة
بأسس متحدة

مثل ٥ ح^٢ د^٢ ٦ ح^٢ د^٢ ٧ س^٢ ٦ - ٥ س^٢ ٦ ٣ س^٢
فهى لا تختلف عن بعضها الا في المكررات والعلامات

(١٧) اختصار الحدود المتشابهة - لاختصار الحدود المتشابهة
تجمع مكررات الحدود الموجبة ثم مكررات الحدود السالبة وي طرح

أصغر المجموعين من الأكبر وتوضع علامة الأكبر امام الباقي ثم
يوضع على يساره الجزء الحرفي المشترك

فلاختصار الحدود المتشابهة $٥ ح + ٧ ح - ٢ ح + ٣ ح + ٦ ح - ١ ح$ ونجمع تكرارات الحدود الموجبة
وهي ٣٦٧٦٥ ينتج ١٥ ثم نجمع تكرارات الحدود السالبة
وهي ٣٦٦٦٢ ينتج ١١ ثم يطرح الأصغر ١١ من الأكبر ١٥
يبقى ٤ وحيث ان علامة المجموع الأكبر موجبة فتعتبر علامة ٤
زائد ثم نضع بجواره الجزء الحرفي المشترك $ح$ فينتج $٤ ح$

(١٨) المقدار الرقي لمقدار جبري - هو ما ينتج من استعاضة
الحروف بمقاديرها العددية واجراء العمليات المبينة عليها

فالمقدار الرقي للحد $٩ ح + ٢ ح$ بفرض أن $٥ = ٦ ح = ٢$ هو

$$٩ \times ٥ + ٢ \times ٢ = ٤٥ + ٤ = ٤٩$$

والمقدار الرقي لكثيرة الحدود $٣ ح - ٢ ح + ٢ ح - ٥ ح$ -

٢ بفرض $٥ = ٦ ح = ٢$ هو

$$٣ \times ٢ - ٢ \times ٥ + ٢ \times ٦ - ٥ \times ٢ = ٦ - ١٠ + ١٢ - ١٠ = -٢$$

$$٣٤٣ - ٧٣٥ + ٥٢٥ - ١٢٥ = ٨$$

$$٨ = ٨٦٠ - ٨٦٨$$

شبيهه - اذا أريد ايجاد المقدار الرقي لكمية كثيرة الحدود
متشابهة فتختصر أولا ثم يبحث عن المقدار الرقي للنتائج

(١٩) كثيرات الحدود المرتبة - يقال ان كثرة الحدود مرتبة

بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف متى كانت أسس

هذا الحرف آخذة في التصاعد أو في التنازل في حدود هذه

الكمية من الحد الاول الى الحد الاخير

فكثيرة الحدود $هـ - ٤ ص + ٥ س - ٣ هـ + ٦ س$

مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف $هـ$ أى ان أسس هذا

الحرف آخذة في التصاعد بالتوالى من الحد الاول الى الاخير

وكثيرة الحدود $٤ ص - ٥ أ + ٢ أ ص - ص$

مرتبة بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف $ص$ أى ان أسس هذا

الحرف آخذة في التنازل بالتوالى من الحد الاول الى الاخير

(٣٠) ترتيب كثيرات الحدود - لترتيب كثيرة الحدود بالنسبة

لدرجات التنازلية لحرف معين يبدأ بكتابة الحد المشتمل على

أعظم درجة لحرف الترتيب ثم ما يليه في الصغير وهكذا

ولترتيبها بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف يبدأ بكتابة الحد

المشتمل على أقل درجة لحرف الترتيب ثم ما يليه في الكبير وهكذا

وإتنبه الى أن الحد الذى لم يشتمل على حرف الترتيب يقدم على

الذى أسس حرف الترتيب فيه واحد في الترتيب التصاعدى ويؤخر

عنه في التنازلى

فلترتيب كثيرة الحدود $٤ ح + ٢ د + ٥ هـ - ٣$

$٣ ح + ٢ د$ بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف $د$

تكتب هكذا $٥ هـ + ٢ د + ٤ ح + ٣ د + ٢$

$٤ د - ٣$ ويرى أنها مرتبة أيضا بالنسبة للدرجات التصاعدية

لحرف $د$

$$6^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 = 36 + 9 - 4 + 1 = 42$$
$$\begin{aligned} 6^{\text{r}} \text{س} \frac{2}{\text{r}} - \text{س}^3 - \text{س}^2 \text{س} + \text{س}^{\text{r}} \text{س} \\ 6^{\text{r}} 1 - \text{س} \frac{0}{\text{r}} + \text{س}^{\text{r}} \text{س} - \text{س}^{\text{r}} \text{س} \\ 3 - \text{س}^3 \text{س} + \text{س}^3 \text{س} - \text{س}^3 \text{س} \end{aligned}$$

(١٩) رتب كلا من الكميات الآتية بالنسبة للدرجات التنازلية
لحرف مشترك فيها

$$6^{\circ}r + 7^{\circ} - 2^{\circ}v + 7^{\circ}r - 9^{\circ}r - 5^{\circ}v$$

$$2 - s + 2^{\circ}r - 2^{\circ}r - 2^{\circ}10 - 2^{\circ}1v$$

التصاعده لحرف مشترك فيما

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$27 - 27 + 270 - 275 - 273$$

(1-2)

$$6 \text{ ل } 8 + \\ 8 \text{ ح } 5 - 7 \text{ د } 3 + 5 \text{ ح } 0$$

العمليات الجبرية

(٢١) تمهيد - لما كانت الحروف في علم الجبر تدل على الأعداد بوجه العموم أى لا يتقيد كل حرف بعدد خاص فلا يحصل من اجراء العمليات عليها نتائج مبين بحرف أو حروف مغايرة للحروف المعلومة وإنما يقتصر في العمليات الجبرية على بيانها

وعلى هذا فإن جمع الكميتين 6 ح لا ينتظر منه الحصول على حرف آخر يدل على مجموعهما كما في جمع العددين 5 ح 6 ح الذى يحصل منه 8 ح وقس على ذلك طرح أو ضرب أو قسمة هاتين الكميتين

فالغرض اذن من العمليات الجبرية هو تحويل الاوضاع المفروضة الى وضع آخر مكافئ لها ويكون أخصر من تلك الاوضاع على قدر الامكان

(٢٢) وللجبر أربع عمليات أصلية كعمليات علم الحساب

الجمع

(٢٣) تعريف - الغرض من الجمع الجبرى تحويل جملة أوضاع جبرية الى وضع يكون مقداره العددى مساويا لمجموع المقادير العددية للأوضاع المفروضة

(٢٤) قاعدة لجمع جلة كميات جبرية يكتب بعضها بجانب بعض بدون تغيير اشاراتها ثم تختصر الحدود المتشابهة من الحاصل أن وجدت

$$\begin{aligned} & \text{فمجموع الكميات } ا, ب, ج, د, هـ, و, ز + د - ب + و - ز + د \\ & \text{ومجموع الكميات } ٣, ٦, ٤, ٦, ٤, ٦, ٤ - ٦ - ٤ + ٦ + ٤ + ٦ \\ & ٤ - ٤ = ٤ - ٤ = ٤ - ٤ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ومجموع الكميات } ١ - ب + ٦ + ٦ + ٤ + ٤ + ٦ - ٦ - ٤ \\ & - هـ هـ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ١ - ب + ٦ + ٦ + ٤ + ٤ + ٦ - ٦ - ٤ = ١ - ب \\ & + ٤ - ٤ \end{aligned}$$

لان كلامن هذه النواتج يشتمل على جميع الكميات المراد جمعها فقدره العددي يتكون مساويا لمجموع المقادير العددية لهذه الكميات

(٢٥) تنبيه (١) - اذا وجد بين الكميات المراد جمعها حدود متشابهة تكتب تحت بعضها ثم تجرى عملية الجمع مع ملاحظة اختصار الحدود المتشابهة من أول الامر مثال ذلك

$$\begin{array}{r} ٨ \text{ ح } ٤ - ٥ \text{ ح } ٤ + ٣ \text{ ح } ٤ + ٧ \text{ ح } ٤ \\ ٦ \text{ ح } ٤ - ٢ \text{ ح } ٤ + ٤ \text{ ح } ٤ \\ - ٥ \text{ ح } ٤ + ٤ \text{ ح } ٤ - ٧ \text{ ح } ٤ - ٧ \text{ ح } ٤ \\ \hline ٩ \text{ ح } ٤ - ٣ \text{ ح } ٤ - ٦ \text{ ح } ٤ \end{array}$$

(٢٦) تنبيه (٢) - اذا وضعت كية بين قوسين تسبقها علامة + دل ذلك على لزوم اضافة مايين القوسين الى ما قبل علامة + فاذا أريد اجراء العمل حذف القوسان مع علامة + التي تسبقهما وكتبت السكمية بعلاماتها مثلا

$$a + b + c + d = (a + b + c) + d$$

$$a + b + c - d = (a + b + c) - d$$

تعارف

(۲۱) اجمع ا ب ج د ه و ز ح ط ی ک
 (۲۲) اجمع ا ب ج د ه و ز ح ط ی ک
 (۲۳) اجمع ا ب ج د ه و ز ح ط ی ک

(24) اجمع ۱۲ + ۳ - ۱۲۶۸۴ - ۵۲ + ۱۲
 اجمع ۱۲ + ۳ - ۱۲۶۸۴ - ۵۲ + ۱۲
 ۰۴ ۴۲ ۰۴
 ۵۲ - ۵۲۶۵۲

(20) اجمع ۲ ب۱۴ - ۱۸۶ ب۱۴ + ۱۴ ب۱۴
 اجمع ۱۴ ب۱۴ - ۱۰ ب۱۴ + ۱۴ ب۱۴ + ۱۴ ب۱۴

$$(٢٦) \text{ اجمع } ٥\text{ أن} - ٢\text{ أن} - ٧\text{ أن} + ٢\text{ ب} + ٦\text{ ج} - ٦\text{ د} \\ + ٢\text{ أن} + ٥\text{ أن} - ٢\text{ أن} - \frac{٢}{٤}\text{ أن} - ٢\text{ ب} + ٦\text{ ج} - ٧\text{ د} \\ - ٢\text{ أن} + ٢\text{ أن} + ٥\text{ أن} + ٦\text{ ب} + ٦\text{ ج}$$

(٢٧) اجمع كثيرات الحدود الآتية

$$٢\text{ أن} - ٢\text{ أن} + ٢\text{ أن} + \frac{١}{٤}\text{ أن} + ١٥\text{ أن} - ٦\text{ ب} \\ - ٥\text{ أن} + ٢\text{ أن} - ٢\text{ أن} - ٨\text{ أن} + ٦\text{ ب} + ٦\text{ ج} \\ ٩\text{ أن} + ٢\text{ أن} - ٥\text{ أن} + ٤\text{ أن} - \frac{٣}{٤}\text{ أن}$$

$$(٢٨) \text{ ما مجموع الكميات } ٧\text{ أن} - ٤\text{ أن} - ٢\text{ أن} - \\ ٢\text{ ب} + ٦\text{ ج} - ٨\text{ د} + ٦\text{ ب} + ٢\text{ ج} - ٥\text{ أن} - ٦\text{ أن} \\ + ٢\text{ أن} + ٢\text{ ب} + ٦\text{ ج} - ٥\text{ أن} - ٦\text{ ب} + ٦\text{ ج} - ٨\text{ د} \\ - \frac{٣}{٤}\text{ أن} - ٨\text{ د}$$

(٢٩) تابع عنده فرقك في خزنته وله بضائع قيمتها
ب فرقك وله مبلغ ج فرقك فما مقدار ما يمتلكه

(٣٠) ما مجموع ثلاثة أعداد صحيحة متتالية أصغرهما ج وما
مجموع عددين متوالين أكبرهما د

الطرح

(٣٧) تعريف - الغرض من طرح كيتين جبريتين من بعضهما
البحث عن كمية تالفة لو أضيف مقدارها العددي الى المقدار

العدي لكمة المطروح يكون الناتج مساويا للقدار العدي
للكمة المطروح منه

(٢٨) قاعدة - اطرح كمة جبرية من أخرى تكتب كمة
المطروح منه وبعدها كمة المطروح مع تغير علامة كل حد
من حدود كمة المطروح وتختصر الحدود المتشابهة ان وجدت
فباقى طرح ح من د هو د و باقى طرح ح من د هو د
 د + د

وباقى طرح $\text{ح + د - ه من ا + ل - د هو ا + ل - د}$
 د - د + د = د

وباقى طرح $\text{ح - د + ه من د - د - ه هو د - د - ه}$
 د - د + د = د

وذلك لانه اذا اضيف الباقى الى كمة المطروح ينتج كمة المطروح منه
(٢٩) تنبيه ١ اذا وجد بين كتي المطروح والمطروح منه
حدود متشابهة تغير اشارات جميع حدود كمة المطروح ثم
توضع الحدود المتشابهة تحت بعضها وتختصر من أول الامر

مثلا اذا أريد أن يطرح من الكمة $\text{ا ب - ا ب - ا ب + ا ب}$
 $\text{ا ب الكمة ا ب - ا ب + ا ب + ا ب}$ نجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r} \text{ا ب} - \text{ا ب} - \text{ا ب} + \text{ا ب} \\ \text{ا ب} + \text{ا ب} + \text{ا ب} - \text{ا ب} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ا ب} - \text{ا ب} + \text{ا ب} - \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} + \text{ا ب} - \text{ا ب} + \text{ا ب} \end{array}$$

ومع التمرين تيسر للطالب وضع الحدود المتشابهة تحت بعضها بدون تغيير الاشارات وملاحظة التغير عقلا
 (٣٠) تنبيه (٢) اذا وضعت كية بين قوسين تسبقهما علامة - دل ذلك على لزوم طرح ما بين القوسين مما قبل علامة - فلذا أريد اجراء العمل حذف القوسان وعلامة - المذكورة وكتبت هذه الكمية بجانب ما قبلها مع تغيير اشارات جمع حدودها مثلاً - (هـ + و - ب) = ز - هـ - و + ب

تمارين

(٢١) بين باقى طرح ح من ز ٦ هـ من - و ٦ - ا من ب
 ٦ - ب من ح

(٢٢) بين باقى طرح ح ٢ + ز من ٤ هـ - و ٦ ٣ ٢ ا
 - ٢ ا ب من ٥ ح ٢ - ل

(٢٣) بين باقى طرح - ١٢ + ب من ١٢ + ٣ ب ٦
 ٣ - ٤ ب + ح من ١٢ - ٢ ب

(٢٤) من الكية ٤ ا ٢ - ١٥ ا - ٣ ب ا طرح ٣ ا
 ٢ - ا ٢ + ٢ ب ثم بين المقدار الرقى للناجى بفرض
 أن ١ = ٤ ٦ = ٢

(٢٥) من الكية ٤ ا ٢ - ٣ ا ٢ + ٥ ا ٢ - ٢ ب ٢
 + ب ا طرح - ١٢ ا ٢ + ٣ ا ٢ + ٤ ا ٢ وابحث

عن المفسر دار الرقي الناتج بفرض أن $١ = ١$ $٦ = ٦$ $٢ = ٢$

وسه $٣ = ٣$

(٢٦) من كثرة الحدود $٤٢٣ - ٤٢٣ - ٤٢٣ - ٤٢٣ + ٤٢٣$

اطرح $٤٢٣ + ٤٢٣ - ٤٢٣ - ٤٢٣$

(٢٧) من الكمية $٨٣ - ٨٣ + ٨٣ - ٨٣ + ٨٣$

اطرح مجموع الكميتين $٨٣ + ٨٣ - ٨٣ - ٨٣$

$٨٣ - ٨٣ + ٨٣ - ٨٣$

(٢٨) احذف الاقواس من الكميات الآتية

$٨٣ - ٨٣ + ٨٣ - ٨٣$

٨٣

$٨٣ - ٨٣ + ٨٣ - ٨٣$

$٨٣ - ٨٣$

$٨٣ - ٨٣ + ٨٣ - ٨٣$

$٨٣ - ٨٣$

$٨٣ + ٨٣ - ٨٣ - ٨٣$

(٢٩) أضلاع مثلث ٨٣ و ٨٣ ومحيط المثلث ٨٣ والمطلوب

بيان الاوضاع الجبرية التي يحسب بها كل واحد من أضلاع

هذا المثلث بفرض أن الضلعين الآخرين معلومان وكذا

محيط المثلث

(٤٠) حوض مسط عليه خنفتان الاولى تصب ١ لتر في ٥ دقائق والثانية تصب ١ لتر في ٤ دقائق وفي أسفل الحوض بالوعة تفرغ ٨ لتر في ٨ دقائق والمطلوب بيان الوضع الجبري الذي يحسب به ما يوجد في الحوض بعد ساعة اذا فتحت الخنفتان والبالوعة

الضرب

(٣١) تعريف - الغرض من ضرب كيتين جبريتين في بعضهما إيجاد كمية ثالثة يكون مقدارها العددي يساوي حاصل ضرب المقدارين العددين للكميتين المفروضتين

(٣٢) يشتمل الضرب الجبري على ثلاث حالات الاولى ضرب حد في حد الثانية ضرب كمية كثيرة الحدود في حد الثالثة ضرب كمية كثيرة الحدود في مثلها

ضرب حد في حد

(٣٣) قاعدة - لضرب حد في حد يضرب مكرر المضروب في مكرر المضروب فيه ثم يوضع على يمينه كل حرف مشترك باس يساوي مجموع أسسهما في المضروبين ثم الحروف غير المشتركة توضع كما هي ويقرن الحاصل بعلامة (+) زائد اذا اتحدت علامتا المضروبين وبعلامة (-) ناقص اذا اختلفت علامتان

فعل هذا يكون $٣ \text{ د ه } ٢$ في $٧ \text{ د و } ١ = ٢١ \text{ د ه } ٥$ و ٦

$$٨ \text{ د ه } ٢ \times - = ٥ \text{ د و } ١ - = ٤٠ \text{ د ه } ٦$$

$$- ٩ \text{ د ه } ١ \times - = ٣ \text{ د ه } ٢ = ٢٧ \text{ د ه } ١$$

$$- ٣ \text{ د ه } ١ \times - = ١ \text{ د ه } ٢ = ٢ \text{ د ه } ١$$

(٣٤) تنبيه - بملاحظة تعريف القوة المذكور بـ (٤)

وما تقتضيه علامة حاصل الضرب المينة بـ ٣٣ السابقة

يستنتج ما يأتي

الحد الموجب جميع قواه تكون موجبة - وأما الحد السالب

فقواه الزوجية موجبة والفردية سالبة

$$\text{أعني أن } (٦ + ٢) = ٨ \text{ د ه } ٢ = (٢ + ٦) = ٨ \text{ د ه } ٢$$

$$٦ (٢ - ١) = ٦ \text{ د ه } ١ = (١ - ٢) = -٦ \text{ د ه } ١$$

ضرب كثيرة الحدود في حد

(٣٥) قاعدة لضرب كمية كثيرة الحدود في حد بضرب كل حد

من حدودها في ذلك الحد

$$\text{مثلا } (١٠ + ٢٠ + ٣٠) \text{ د ه } ١ = ١٠ \text{ د ه } ١ + ٢٠ \text{ د ه } ١ + ٣٠ \text{ د ه } ١$$

$$١٠ \text{ د ه } ١ + ٢٠ \text{ د ه } ١ + ٣٠ \text{ د ه } ١$$

$$(١ + ٢ + ٣) \text{ د ه } ١ = ١ \text{ د ه } ١ + ٢ \text{ د ه } ١ + ٣ \text{ د ه } ١$$

$$١ \text{ د ه } ١ + ٢ \text{ د ه } ١ + ٣ \text{ د ه } ١$$

وبمثل ذلك يجري العمل في ضرب حد في كمية كثيرة الحدود

ضرب كمية كثيرة الحدود في مثلها

(٣٦) قاعدة - لضرب كمية كثيرة الحدود في مثلها تضرب
 كمية المضروب في كل حد من كمية المضروب فيه ثم تختصر
 الحدود المتشابهة في الحاصل ان وجدت

$$\text{مثلا } (٥ - ٤ + ٣) = (٤ - ٣) \quad (٥ - ٤ + ٣) = (٤ - ٣) \\
 ٥ - ٤ + ٣ + ٤ - ٣ = ٤ - ٣ + ٥ - ٤ + ٣ - ٤ + ٣ \\
 ٥ - ٤ + ٣ + ٤ - ٣ = ٥ - ٤ + ٣ - ٤ + ٣$$

(٣٧) ضرب كثيرات الحدود المرتبة - لسهولة العمل في الضرب
 ترتب كل من المضروب والمضروب فيه بالنسبة للدرجات
 التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيهما ثم يجرى العمل كما
 في القاعدة السابقة ويلاحظ وضع الحدود المتشابهة تحت بعضها
 واختصارها من أول الامر فانا أريد ضرب ٣ ٤ - ٢ ٥ في
 + ٣ ٥ - ٢ ٤ في ٢ ٤ + ٣ ٥ - ٢ ٤
 ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ٤ كما
 في (٢٠) ثم نجرى العمل بمقتضى قاعدة (٣٦) هكذا

$$\begin{array}{r} ٣ - ٢ + ١ \\ ٥ - ٤ + ٣ \\ \hline ١٥ - ١٠ + ١٠ - ١٢ + ١٢ - ١٥ + ١٥ - ١٢ + ١٠ - ١٢ + ١٠ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ١٥ - ١٠ + ١٠ - ١٢ + ١٢ - ١٥ + ١٥ - ١٢ + ١٠ - ١٢ + ١٠ \\ ١٥ - ١٠ + ١٠ - ١٢ + ١٢ - ١٥ + ١٥ - ١٢ + ١٠ - ١٢ + ١٠ \\ \hline ١٥ - ١٠ + ١٠ - ١٢ + ١٢ - ١٥ + ١٥ - ١٢ + ١٠ - ١٢ + ١٠ \end{array}$$

(٣٨) تنبيه - متى رتب المضروبان بالنسبة للدرجات التنزلية لحرف مشترك فيهما يشاهد أن الحد الاول من حاصل الضرب يشتمل على حرف الترتيب بأس أكبر من جميع أسسه في الحدود الاخر ويشاهد أن الحد الاخير يشتمل على حرف الترتيب بأس أصغر من جميع أسسه في الحدود الاخر

ومتى رتب المضروبان بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف مشترك فيهما يشاهد أن الحد الاول من حاصل الضرب يشتمل على حرف الترتيب بأس أصغر من جميع أسسه في الحدود الاخر والحد الاخير يشتمل على حرف الترتيب بأس أكبر من جميع أسسه في الحدود الاخر

وينتج من ذلك أن الحد الاول والاخير لا يمكن أن يكونا مشابهين لاي حد من الحدود الاخر فاذن لا يمكن اختصارهما

(٣٩) النهاية الصغرى والكبرى لعدد حدود حاصل ضرب كيتين كثيرى الحدود - أقل ما يشتمل عليه حاصل ضرب كيتين كثيرى الحدود حدان فقط (وهما الاول والاخير)

وقد لا يتأتى اختصار بين حدود حاصل ضرب كيتين كثيرى الحدود ومن ذلك يقال أكثر ما يشتمل عليه حاصل ضرب كيتين كثيرى الحدود هو حدود بقدر حاصل ضرب عدد حدود المضروب في عدد حدود المضرب فيه

$$2s + 3p + 3d + 4f + 5g + 6h + 7i + 8j + 9k + 10l + 11m + 12n + 13o + 14p + 15q + 16r + 17s + 18t + 19u + 20v + 21w + 22x + 23y + 24z + 25aa + 26ab + 27ac + 28ad + 29ae + 30af + 31ag + 32ah + 33ai + 34aj + 35ak + 36al + 37am + 38an + 39ao + 40ap + 41aq + 42ar + 43as + 44at + 45au + 46av + 47aw + 48ax + 49ay + 50az + 51ba + 52bb + 53bc + 54bd + 55be + 56bf + 57bg + 58bh + 59bi + 60bj + 61bk + 62bl + 63bm + 64bn + 65bo + 66bp + 67bq + 68br + 69bs + 70bt + 71bu + 72bv + 73bw + 74bx + 75by + 76bz + 77ca + 78cb + 79cc + 80cd + 81ce + 82cf + 83cg + 84ch + 85ci + 86cj + 87ck + 88cl + 89cm + 90cn + 91co + 92cp + 93cq + 94cr + 95cs + 96ct + 97cu + 98cv + 99cw + 100cx + 101cy + 102cz + 103da + 104db + 105dc + 106dd + 107de + 108df + 109dg + 110dh + 111di + 112dj + 113dk + 114dl + 115dm + 116dn + 117do + 118dp + 119dq + 120dr + 121ds + 122dt + 123du + 124dv + 125dw + 126dx + 127dy + 128dz + 129ea + 130eb + 131ec + 132ed + 133ee + 134ef + 135eg + 136eh + 137ei + 138ej + 139ek + 140el + 141em + 142en + 143eo + 144ep + 145eq + 146er + 147es + 148et + 149eu + 150ev + 151ew + 152ex + 153ey + 154ez + 155fa + 156fb + 157fc + 158fd + 159fe + 160ff + 161fg + 162fh + 163fi + 164fj + 165fk + 166fl + 167fm + 168fn + 169fo + 170fp + 171fq + 172fr + 173fs + 174ft + 175fu + 176fv + 177fw + 178fx + 179fy + 180fz + 181ga + 182gb + 183gc + 184gd + 185ge + 186gf + 187gg + 188gh + 189gi + 190gj + 191gk + 192gl + 193gm + 194gn + 195go + 196gp + 197gq + 198gr + 199gs + 200gt + 201gu + 202gv + 203gw + 204gx + 205gy + 206gz + 207ha + 208hb + 209hc + 210hd + 211he + 212hf + 213hg + 214hh + 215hi + 216hj + 217hk + 218hl + 219hm + 220hn + 221ho + 222hp + 223hq + 224hr + 225hs + 226ht + 227hu + 228hv + 229hw + 230hx + 231hy + 232hz + 233ia + 234ib + 235ic + 236id + 237ie + 238if + 239ig + 240ih + 241ii + 242ij + 243ik + 244il + 245im + 246in + 247io + 248ip + 249iq + 250ir + 251is + 252it + 253iu + 254iv + 255iw + 256ix + 257iy + 258iz + 259ja + 260jb + 261jc + 262jd + 263je + 264jf + 265jg + 266jh + 267ji + 268jj + 269jk + 270jl + 271jm + 272jn + 273jo + 274jp + 275jq + 276jr + 277js + 278jt + 279ju + 280jv + 281jw + 282jx + 283jy + 284jz + 285ka + 286kb + 287kc + 288kd + 289ke + 290kf + 291kg + 292kh + 293ki + 294kj + 295kk + 296kl + 297km + 298kn + 299ko + 300kp + 301kq + 302kr + 303ks + 304kt + 305ku + 306kv + 307kw + 308kx + 309ky + 310kz + 311la + 312lb + 313lc + 314ld + 315le + 316lf + 317lg + 318lh + 319li + 320lj + 321lk + 322ll + 323lm + 324ln + 325lo + 326lp + 327lq + 328lr + 329ls + 330lt + 331lu + 332lv + 333lw + 334lx + 335ly + 336lz + 337ma + 338mb + 339mc + 340md + 341me + 342mf + 343mg + 344mh + 345mi + 346mj + 347mk + 348ml + 349mm + 350mn + 351mo + 352mp + 353mq + 354mr + 355ms + 356mt + 357mu + 358mv + 359mw + 360mx + 361my + 362mz + 363na + 364nb + 365nc + 366nd + 367ne + 368nf + 369ng + 370nh + 371ni + 372nj + 373nk + 374nl + 375nm + 376nn + 377no + 378np + 379nq + 380nr + 381ns + 382nt + 383nu + 384nv + 385nw + 386nx + 387ny + 388nz + 389oa + 390ob + 391oc + 392od + 393oe + 394of + 395og + 396oh + 397oi + 398oj + 399ok + 400ol + 401om + 402on + 403oo + 404op + 405oq + 406or + 407os + 408ot + 409ou + 410ov + 411ow + 412ox + 413oy + 414oz + 415pa + 416pb + 417pc + 418pd + 419pe + 420pf + 421pg + 422ph + 423pi + 424pj + 425pk + 426pl + 427pm + 428pn + 429po + 430pp + 431pq + 432pr + 433ps + 434pt + 435pu + 436pv + 437pw + 438px + 439py + 440pz + 441qa + 442qb + 443qc + 444qd + 445qe + 446qf + 447qg + 448qh + 449qi + 450qj + 451qk + 452ql + 453qm + 454qn + 455qo + 456qp + 457qq + 458qr + 459qs + 460qt + 461qu + 462qv + 463qw + 464qx + 465qy + 466qz + 467ra + 468rb + 469rc + 470rd + 471re + 472rf + 473rg + 474rh + 475ri + 476rj + 477rk + 478rl + 479rm + 480rn + 481ro + 482rp + 483rq + 484rr + 485rs + 486rt + 487ru + 488rv + 489rw + 490rx + 491ry + 492rz + 493sa + 494sb + 495sc + 496sd + 497se + 498sf + 499sg + 500sh + 501si + 502sj + 503sk + 504sl + 505sm + 506sn + 507so + 508sp + 509sq + 510sr + 511ss + 512st + 513su + 514sv + 515sw + 516sx + 517sy + 518sz + 519ta + 520tb + 521tc + 522td + 523te + 524tf + 525tg + 526th + 527ti + 528tj + 529tk + 530tl + 531tm + 532tn + 533to + 534tp + 535tq + 536tr + 537ts + 538tt + 539tu + 540tv + 541tw + 542tx + 543ty + 544tz + 545ua + 546ub + 547uc + 548ud + 549ue + 550uf + 551ug + 552uh + 553ui + 554uj + 555uk + 556ul + 557um + 558un + 559uo + 560up + 561uq + 562ur + 563us + 564ut + 565uu + 566uv + 567uw + 568ux + 569uy + 570uz + 571va + 572vb + 573vc + 574vd + 575ve + 576vf + 577vg + 578vh + 579vi + 580vj + 581vk + 582vl + 583vm + 584vn + 585vo + 586vp + 587vq + 588vr + 589vs + 590vt + 591vu + 592vv + 593vw + 594vx + 595vy + 596vz + 597wa + 598wb + 599wc + 600wd + 601we + 602wf + 603wg + 604wh + 605wi + 606wj + 607wk + 608wl + 609wm + 610wn + 611wo + 612wp + 613wq + 614wr + 615ws + 616wt + 617wu + 618wv + 619ww + 620wx + 621wy + 622wz + 623xa + 624xb + 625xc + 626xd + 627xe + 628xf + 629xg + 630xh + 631xi + 632xj + 633xk + 634xl + 635xm + 636xn + 637xo + 638xp + 639xq + 640xr + 641xs + 642xt + 643xu + 644xv + 645xw + 646xx + 647xy + 648xz + 649ya + 650yb + 651yc + 652yd + 653ye + 654yf + 655yg + 656yh + 657yi + 658yj + 659yk + 660yl + 661ym + 662yn + 663yo + 664yp + 665yq + 666yr + 667ys + 668yt + 669yu + 670yv + 671yw + 672yx + 673yy + 674yz + 675za + 676zb + 677zc + 678zd + 679ze + 680zf + 681zg + 682zh + 683zi + 684zj + 685zk + 686zl + 687zm + 688zn + 689zo + 690zp + 691zq + 692zr + 6$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & \text{£} & & \text{₹} & & \text{₹} \\
 & \text{₹} & + & \text{₹} & + & \text{₹} \\
 & \text{₹} & + & \text{₹} & + & \text{₹}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 & \text{₹} & & \text{₹} & & \text{₹} \\
 & \text{₹} & - & \text{₹} & - & \text{₹} \\
 & \text{₹} & - & \text{₹} & - & \text{₹}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 + 5 = 20 \\ 20 + 5 = 25 \\ 25 + 5 = 30 \\ 30 + 5 = 35 \\ 35 + 5 = 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{f_3 + f_2 + f_1} \\ f_3 - f_2 - f_1 - \end{array}$$

$$f_5 - f_5' - s f_7 - f_5' + s f_7 + f_7$$

قوانين عمومية في الضرب

(٤٠) الاول - اذا أُجريت عملية ضرب $(s + 2)(s + 2)$

أى $(س + ح)^2$ يحصل $(س + ح)^2 = س^2 + ٢سح + ح^2$
 أعنى أن مربع مجموع حدين يساوى مربع الاول زائدا ضعف
 الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى

(٤١) الثانى - اذا أجزيت عملية ضرب $(س - ح)$ $(س - ح)$
 أى $(س - ح)^2$ يحصل $(س - ح)^2 = س^2 - ٢سح + ح^2$
 أعنى أن مربع فرق حدين يساوى مربع الاول ناقصا ضعف
 الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى

(٤٢) تنبيهه - يمكن اعتبار هذين القانونين قانونا واحدا
 بملاحظه أن الحد $(س - ح)$ مضافا اضافة جبرية الى $ح$ وحينئذ
 يقال على وجه العموم

مربع كمية ذات حدين يساوى مربع الحد الاول مضافا اليه
 ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى
 (٤٣) الثالث - اذا أجزيت عملية ضرب $(س + ح)$ فى
 $(س - ح)$ ينتج

$$(س + ح)(س - ح) = س^2 - ح^2$$

أعنى أن حاصل ضرب مجموع كيتين فى تفاضلهما يساوى الفرق
 بين مربعيهما

(٤٤) الرابع - اذا أجزيت عملية ضرب

$$(س + ح)(س + ح)(س + ح) = س^3 + ٣س^2ح + ٣سح^2 + ح^3$$

أعنى أن مكعب مجموع حدين يساوى مكعب الاول زائدا ثلاثة

أمثال مربع الاول في الثاني زائدا ثلاثة أمثال الاول في مربع
الثاني زائدا مكعب الثاني

(٤٥) الخامس - اذا أجريت عملية ضرب

$$(x - y)(x - y)(x - y)(x - y)(x - y)$$

$$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

أعني أن مكعب فرق حدين يساوي مكعب الاول ناقصا ثلاثة
أمثال مربع الاول في الثاني زائدا ثلاثة أمثال الاول في مربع
الثاني ناقصا مكعب الثاني

تنبيه يمكن اعتبار هذين القانونين الرابع والخامس قانونا
واحدا باعتبار ان الحد (x - y) مضافا اضافة جبرية أي ح

(٤٦) السادس - اذا أجريت عملية ضرب (a - b)

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

مكعبين كيتين يساوي حاصل ضرب الفرق بينهما في مجموع مربع

الاولى وحاصل ضرب الكمية الاولى في الثانية ومربع الثانية

(٤٧) السابع - اذا أجريت عملية ضرب (a + b) في

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

كيتين يساوي حاصل ضرب مجموع هاتين الكميتين في المقدار

الناتج من مربع الاول مطروحا منه حاصل ضرب الاول في

الثانية مضافا للباقي مربع الثانية

(٤٨) الثامن - اذا أجريت عملية ضرب (a + b)

$$(a^2 + ab + b^2)$$

$$س^٢ + س^٢ + س + س + ١ + ١ + أ + س^٢ + (١ + ب) + س + ١$$

أعني أن حاصل ضرب كمية ذات حدين في مثلها متحددتين في
الحذ الاول يساوى مربع الحذ الاول زائدا حاصل ضرب مجموع
الحدين الثانيين في الاول زائدا حاصل ضرب الحدين الثانيين
في بعضهما

تبينه - هذا القانون حقيقى مهما كان مقدار ا , ب أى سواء
كانا موجبين أو سالبين أو أحدهما موجب والآخر سالب وسواء
كانا في كل حالة مختلفين أو متساويين وحينئذ فيمكن وضع القوانين
الآتية

$$(١) (س + ١) (س + ١) = س^٢ + (١ + ب) س + ١$$

$$(٢) (س + ١) (س + ١) = س^٢ + ٢ س + ١$$

$$(٣) (س - ١) (س - ١) = س^٢ - (١ + ب) س + ١$$

$$(٤) (س - ١) (س - ١) = س^٢ - ٢ س + ١$$

$$(٥) (س + ١) (س - ١) = س^٢ - (١ - ب) س - ١$$

$$(٦) (س + ١) (س - ١) = س^٢ - ١$$

وبالتأمل يرى أن قانون (٢) هو عين الناتج بنمرة ٤٠ وقانون ٤

هو عين الناتج بنمرة ٤١ وقانون (٦) هو عين الناتج بنمرة ٤٣

أعني أن القوانين السابقة المذكورة ليست إلا أحوالا خصوصية

من القانون الثامن بنمرة ٤٨

(٤٩) مربع كمية كثيرة الحدود - تقدم أن مربع كمية ذات حدين مثل

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

فإذا أريد إيجاد مربع كمية ذات ثلاثة حدود مثل

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

فيحدث $(x + y + z)^2 = (x + y)^2 + 2z(x + y) + z^2$ وهذا يساوي

فإذا وضع بدل z مقداره يحدث

$$(x + y + z)^2 = (x + y)^2 + 2z(x + y) + z^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

أعني أن مربع كمية ذات ثلاثة حدود يساوي مجموع مربعات حدودها زائدا ضعف حاصل ضرب حدودها في بعضها متتالي وهذه القاعدة عامة مهما كان عدد الحدود

وبيان ذلك يقال إذا فرض أنها متحققة في حدود عددها m مثل $(x + y + z + \dots + l)^2$ تتحقق في حدود تزيد عنها بواحد مثل $(x + y + z + \dots + l + m)^2$

لأننا ان رمزنا بخرف z لمجموع الحدود الاول نؤول الكمية الى $(x + y + z + \dots + l + m)^2$ ومعلوم أن $(x + y + z + \dots + l + m)^2 = (x + y + z + \dots + l)^2 + 2m(x + y + z + \dots + l) + m^2$ أما الجزء الاول $(x + y + z + \dots + l)^2$ فهو مربع الكمية ذات الحدود $(m - 1)$

التي عددها م ويشتمل على مربعات هذه الحدود وأضعاف
حاصل ضربها في بعضها مثنى وأما الجزء الثاني ٢ ب ع فهو
يشتمل على أضعاف الحدود التي عددها م في الحد الجديد وأما
الجزء الثالث ع^٢ فهو مربع الحد الجديد

فتبين من ذلك أنه بفرض تحقيق هذه القاعدة في حدود عددها
م تتحقق في حدود عددها م + ١ وحيث أنها متحققة في ثلاثة
محدود فتتحقق في أربعة وحينئذ متى علم أنها متحققة في أربعة
تتحقق في حدود عددها خمسة وحينئذ تكون عامة

تمارين

المطلوب إيجاد حاصل ضرب كل من المقادير الآتية

$$(٤١) \quad ٢٢٢٢ \times ٢٢٢٢ - ٤٤٤٤ \times ٥٥٥٥ + ٦٦٦٦$$

$$٢٢٢٢ \times ٢٢٢٢ - ٤٤٤٤ \times ٥٥٥٥ + ٦٦٦٦$$

$$(٤٢) \quad (٢ + ٣ + ٤ + ٥) (٦ - ٧ + ٨ - ٩) -$$

$$(٢ - ٣ - ٤ - ٥) (٦ - ٧ - ٨ - ٩)$$

$$(٤٣) \quad (٢ - ٣ + ٤ - ٥) (٦ + ٧ - ٨ + ٩) -$$

$$(٢ - ٣ - ٤ - ٥) (٦ - ٧ - ٨ - ٩)$$

$$(٤٤) \quad ٥٥٥٥ - ٤٤٤٤ + ٣٣٣٣ - ٢٢٢٢ + ١١١١$$

$$- ٨٨٨٨ + ٧٧٧٧ - ٦٦٦٦ + ٥٥٥٥$$

$$(٤٥) \quad ٤٤٤٤ - ٣٣٣٣ + ٢٢٢٢ - ١١١١ + ٥٥٥٥ -$$

$$+ \text{ر} \text{ن} \text{في} \text{ع} \text{ب} \text{ح} - \text{م} \text{ن} \text{ح} + \text{ر} \text{ن} \text{ح} -$$

$$(٤٦) \text{ه} \text{و} \text{ن} - \text{م} \text{ن} \text{ح} - \text{ر} \text{ن} \text{ح} - \text{ع} \text{ب} \text{في} \text{ن} \text{ه} -$$

$$(٤٧) \text{ا} \text{ب} \text{ح} + \text{ق} \text{د} \text{ه} + \text{و} \text{ز} \text{ح} + \text{ي} \text{ك} \text{ه} + \text{ل} \text{م} \text{ه} -$$

$$(٤٨) \text{ح} \text{د} + \text{ح} \text{ز} + \text{د} - \text{ح} \text{ز} \text{في} \text{ح} + \text{د}$$

المطلوب ايجاد مقادير الكميات الانسية بدون اجراء
عملية الضرب

$$(٤٩) (\text{م} + \text{ل}) \text{ح} (\text{م} - \text{ل}) \text{ح} (\text{م} + \text{ل}) \text{ح} (\text{م} - \text{ل}) \text{ح}$$

$$(٥٠) (\text{م} + \text{ل}) (\text{م} - \text{ل}) (\text{م} + \text{ل}) (\text{م} - \text{ل}) (\text{م} + \text{ل}) (\text{م} - \text{ل})$$

$$(٥١) (\text{ا} + \text{ب}) \text{ح} (\text{ا} - \text{ب}) \text{ح} (\text{ا} + \text{ب}) \text{ح} (\text{ا} - \text{ب}) \text{ح}$$

$$(٥٢) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح}) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح}) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح})$$

$$(٥٣) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح}) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح}) (\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح})$$

$$(٥٤) (\text{د} + \text{ح} + \text{ا} - \text{ب}) \text{ح} (\text{د} + \text{ح} + \text{ا} - \text{ب}) \text{ح}$$

$$(6) \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \\ (50) \text{ المطلوب إيجاد حاصل ضرب } (س - ٢) (س + ٢) \\ (س + ١) (س + ٦) (س + ٢) (س - ٢) (س - ٤) (س + ١) +$$

$$(56) \text{ ما المقدار الرقى لحاصل ضرب} \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \frac{1}{2}) (٢٥ - \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ إذا كان } (٧ - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \frac{1}{2}) \\ (57) \text{ ما الفرق بين ضربى عددين متوالين مثل } 6 \text{ و } 7 \\ (١) \text{ وتطبق ذلك على } ٤٩ \text{ و } ٥٠$$

$$(58) \text{ ما الفرق بين مكعبى عددين متوالين مثل } ٦ \text{ و } ٧ \\ (س + ١)$$

$$\text{المطلوب تحقيق التساويات الآتية} \\ (59) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{20} \\ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{30} \\ (60) \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{6}$$

استعمال الاقواس

(٥٠) قد يحتاج في كثير من الاحوال الى استعمال الاقواس
فلشين أنواع الاقواس واستعمالها وكيفية حذفها

(٥١) أنواع الاقواس - الاقواس المستعملة عادة هي ()

{ } [] 6

(٥٢) استعمال الاقواس - تستعمل الاقواس حينما يراد

بيان اضافة المجموع الجبري لجملة كميات الى كمية أخرى (بسيطة

أو مركبة) أو طرحه منها أو ضربه فيها أو قسمته عليها (أحيانا)

وقد يتكرر ذلك فتجعل كل كمية ذات حدين فأكثر بين قوسين

مثلا اذا أريد بيان أن المجموع الجبري للكميات $6 + 6 - 6$ -

هـ مضاف الى كمية ب يكتب ب + ($6 + 6 - 6$ هـ) واذا

أريد بيان طرحه من ب يكتب ب - ($6 + 6 - 6$ هـ)

فاذا أريد بيان ضربه في ب يكتب ($6 + 6 - 6$ هـ) ب

واذا أريد بيان قسمته على ب يكتب ($6 + 6 - 6$ هـ) : ب

وكمية ب اما أن تكون ذات حد واحد أو ذات حدين فأكثر انما

اذا لم تكن ذات حد واحد يلزم وضعها بين قوسين أيضا فاذا فرض

أن ب = صه - وهـ وأريد بيان طرح المجموع السابق

منها كتب (صه - وهـ) - ($6 + 6 - 6$ هـ)

ثم اذا أريد بيان أن الفرق بين ب والمجموع السابق مضروب

في كمية ح يكتب

ح [ب - ($6 + 6 - 6$ هـ)]

فاذا أريد بيان أن الفرق بين هذا الحاصل وكمية ل مضروب

في ع يكتب

ع [ل - ح { ب - ($6 + 6 - 6$ هـ) }]

وقد نوضع شرطة أفقية فوق كمية مركبة من حدين فأكثر
فنعتبر أن هذه الكمية موضوعة بين قوسين .

فالوضع $ج - (د - هـ) ٦$ $ج - د - هـ$ بمعنى واحد
ويستعمل هذا الوضع الأخير غالبا عند الاحتياج الى أقواس
أكثر مما تقدم

ومنى استعملت الأقواس بأشكال مختلفة فكل قوسين من شكل
واحد يحصران بينهما كيتما الخصوصية وعموما يعتبر في كل كمية
موضوعة بين قوسين من نوع واحد أنه قد أجرى على تلك
الكمية ما تقتضيه الاشارات الدالة على ارتباط حدودها ببعضها
وأن ما بين القوسين يدل على تلك النتيجة

(٥٣) حذف الأقواس - يبدأ أولا بحذف القوسين الداخليين
ثم الخارجيين عنهما بالتدريج

ونبأمل عند حذف كل قوسين من نوع واحد للعلامة السابقة
عليهما الدالة على ارتباط الكمية المحصورة بينهما بما قبلها لاجراء
العمل بما تقتضيه هذه العلامة

ومنى كانت الكمية التي بين القوسين مسبوقه بمكرر يلزم
ضرب جميع حدودها فيه مثلا لحذف الأقواس من الوضع
الآتى يجرى العمل بمقتضى ما ذكره كذا

$$\begin{aligned} & ع [ل - ج \{ ب - (ج + د - هـ) \}] \text{ أو} \\ & ع [ل - ج (ب - ج - د + هـ)] \text{ أو} \\ & ع [ل - (ج ب - ج د - د هـ + هـ ع)] \text{ أو} \end{aligned}$$

ع (ل - ج + د + ح + ز - هـ) أو
 ع ل - ج ع + د ع + ح ع + ز ع - هـ ع
 (٥٤) بالعكس وضع كيات بين قوسين - يمكن حصر كيات
 بين أقواس مسبوقه بعلامة + بدون تغيير اشاراتها ويمكن حصر
 كيات بين أقواس مسبوقه بعلامة - مع تغيير اشاراتها
 فلو وضع الكمية ٣ س - ٢ ص + ع بين قوسين مسبوقين
 بعلامة + يكتب هكذا (٣ س - ٢ ص + ع)
 ولوضعها بين قوسين مسبوقين بعلامة - يكتب هكذا
 - (٣ س + ٢ ص - ع)

تمارين

- المطلوب حذف الأقواس من الكميات الآتية
- (٦١) $- ١ - (٣ - ٥) + ١ + (٣ - ٥) + ٥ -$
 $(١ + ٣)$
- (٦٢) $[\{ (١ + ٥) - ١ \} + ٥] - ١$
- (٦٣) $[\{ (١٢ - ٣٤) - ٥٣ \} - ١٢] - ١$
- (٦٤) $\{ (١ - ٣) - ٥ \} + \{ (٣ - ٥) - ١ \} -$
 $\{ (٥ - ١) - ٣ \} -$
- (٦٥) $(-) - (((-) -) -) - (-) - (-) -$
 $((-) -$

القسمة

(٥٥) تعريف - الغرض من قسمة كبتين جبريتين على بعضهما إيجاد كمية ثالثة اذا ضرب مقدارها العددي في المقدار العددي لكمية المقسوم عليه يكون الناتج مساويا للمقدار العددي لكمية المقسوم

(٥٦) تشتمل القسمة الجبرية على ثلاث حالات الاولى قسمة حد على حد الثانية قسمة كمية كثيرة الحدود على حد الثالثة قسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها

قسمة حد على حد

(٥٧) قاعدة - لقسمة حد على حد يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه ويوضع على يساره كل حرف مشترك بأش يساوى باقى طرح أسه فى المقسوم عليه من أسه فى المقسوم ثم يوضع كل حرف وجد فى المقسوم دون المقسوم عليه كما هو ويقرن الخارج بعلامة + اذا اتحد علامتا المقسوم والمقسوم عليه وبعلامة ناقص اذا اختلفت العلامتان

فعلى هذا يكون $٢١ ح د هـ : ٣ ح د = ٧ ح د هـ : ٦$

— $٢٤ ح د هـ : ٨ ح د هـ = ٣ ح د هـ : ٦ هـ$

— $١٥ ح د : ٣ ح د = ٥ ح د : ٦$

$٧٢ ص هـ : ٩ ص هـ = ٨ ص هـ : ٦$

(٥٨) الحرف ذو الاس الصفر انا قسم $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ كان الخارج $\frac{1}{2}$ ومعلوم أنه اذا كان المقسوم يساوى المقسوم عليه يكون الخارج يساوى واحدا فعلى هذا يكون $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} = 1$ وحيث يكون $\frac{1}{2} = 1$ أعني أن كل حرف أسه صفر يساوى واحدا

وينتج من ذلك أنه اذا وجدت حروف في المقسوم والمقسوم عليه بأسس متحدة يلزم محوها وعلى هذا يكون

$$٧٢ \div ٥ \text{ هـ} : ٨ \div ٥ \text{ هـ} = ٩$$

(٥٩) استقالة قسمة حد على حد - قسمة حد على حد تكون غير ممكنة اذا كان أس حرف في المقسوم عليه أكبر من أسه في المقسوم أو وجد حرف في المقسوم عليه ولم يوجد في المقسوم (ومعنى عدم الامكان أن الخارج يكون كسريا) وفي هذه الحالة يبين الخارج بكسر ويختصر على قدر الامكان بمحذف العوامل المشتركة بين المقسوم والمقسوم عليه

$$\text{فعلى هذا يكون } ١٨ \div ٥ \text{ هـ} : ١٤ \div ٥ \text{ هـ} =$$

$$\frac{١٨ \div ٥ \text{ هـ}}{٥ \div ٧} = \frac{١٨ \div ٥ \text{ هـ}}{٥ \div ١٤}$$

(٦٠) الحرف ذو الاس السالب - تقدم أن قسمة $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}$

غير ممكنة وأن الخارج بين بكسر هكذا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

وبمحذف العوامل المشتركة بين الحدين ينتج $\frac{1}{2}$

ولكن اذا طبقنا القاعدة السابقة ولا حظنا أن طرح ٥ من ٢
يؤدي الى - ٢ ينتج أن $\text{ح}^{\text{أ}} : \text{ح}^{\text{و}} = \text{ح}^{\text{ز}}$ وحيث كان كل من
 $\text{ح}^{\text{أ}}$ و $\frac{1}{\text{ح}^{\text{ز}}}$ يدل على خارج قسمة $\text{ح}^{\text{ز}} : \text{ح}^{\text{و}}$ فيكونان متساويين
ويكون $\text{ح}^{\text{أ}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ز}}}$ وينتج من ذلك أن الحرف ذا الاس السالب
يساوى واحدا مقسوما على هذا الحرف بأس موجب

قسمة كثيرة الحدود على حد

(٦١) قاعدة - لقسمة كمية كثيرة الحدود على حد نقسم كل

حد منها على المقسوم عليه

فخارج قسمة ١٥ $\text{ح}^{\text{أ}}$ - ٢٥ $\text{ح}^{\text{ز}}$ + ٤٠ $\text{ح}^{\text{و}}$ - ٢٠ $\text{ح}^{\text{و}}$ هو
على ٥ $\text{ح}^{\text{ز}}$ هو

$$٣ \text{ ح}^{\text{ز}} - ٥ \text{ ح}^{\text{أ}} + ١٨ \text{ ح}^{\text{ز}} - ٤ \text{ ح}^{\text{و}}$$

(٦٢) تنبيه (١) اذا استعالت قسمة بعض حدود المقسوم

على المقسوم عليه نضعها على صورة كسر فخارج قسمة ٤ $\text{ح}^{\text{و}}$ و

$$+ ١٢ \text{ ح}^{\text{و}} - ٤ \text{ ح}^{\text{و}} \text{ على } ٢ \text{ ح}^{\text{و}} \text{ هو } ٢ \text{ ح}^{\text{و}} + ٦ \text{ ح}^{\text{و}} = \frac{٢}{\text{ح}^{\text{و}}}$$

(٦٣) تنبيه (٢) اذا احتوت ذات الحدود على حرف أو

حروف مشتركة في جميع حدودها أمكن أخذ الحروف المشتركة

بأقل أس لها وقسمة الكمية عليها واعتبار الخارج مضروبا

مشتركا في ذلك الحد (وهذا ما يسمى بأخذ مضروب مشترك)

فعلى هذا في الكمية ٢ $\text{ح}^{\text{أ}}$ - ٣ $\text{ح}^{\text{ز}}$ + ٥ $\text{ح}^{\text{و}}$ + ٢٠ $\text{ح}^{\text{و}}$

$\text{ح}^{\text{أ}}$ يمكن أخذ $\text{ح}^{\text{و}}$ مضروبا مشتركا وبصير هكذا

$$(٢ - ٣ \text{ ح}^{\text{ز}} + ٥ + ٢٠) \text{ ح}^{\text{و}}$$

قسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها

(٦٤) قاعدة - لقسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها يرتبان بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيهما ثم يقسم أول حد من عین المقسوم على أول حد من عین المقسوم عليه فينتج أول حد من خارج القسمة يضرب في المقسوم عليه ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم أول حد من الباقي على أول حد من المقسوم عليه فينتج ثانی حد من الخارج يضرب في المقسوم عليه ويطرح الحاصل من الباقي الاول ويستمر العمل الى أن يصير الباقي صفراً أو تستحيل قسمته على المقسوم عليه فاذا أريد قسمة $٣١ د٥ + ٢٠ د٤ - ١٤ د٣ + ٦ د٢$ على $٣ د٤ + ٢ د٣ - ٤ د٢$ يرتبان بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف $د$ ويجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l}
 ٣١ د٥ + ٢٠ د٤ - ١٤ د٣ + ٦ د٢ & ٣ د٤ + ٢ د٣ - ٤ د٢ \\
 \hline
 ٣١ د٥ + ٢٠ د٤ - ١٤ د٣ + ٦ د٢ & ١٠ د٤ + ١٠ د٣ - ١٠ د٢ \\
 \hline
 ٠ د٥ + ١٠ د٤ - ٢٤ د٣ + ١٦ د٢ & ١٠ د٤ + ١٠ د٣ - ١٠ د٢ \\
 \hline
 ٠ د٥ + ٠ د٤ - ٣٤ د٣ + ٢٦ د٢ & ٠ د٥ + ٠ د٤ - ٣٤ د٣ + ٢٦ د٢ \\
 \hline
 ٠ د٥ + ٠ د٤ + ١٠ د٣ - ١٠ د٢ & ٠ د٥ + ٠ د٤ + ١٠ د٣ - ١٠ د٢ \\
 \hline
 ٠ د٥ + ٠ د٤ + ٠ د٣ + ٠ د٢ & ٠ د٥ + ٠ د٤ + ٠ د٣ + ٠ د٢
 \end{array}$$

(٦٥) تنبيهات - الاول يحسن عند اجراء الاعمال أن لا ينزل في الباقي الاول جميع حدود المقسوم مرة واحدة وانما ينزل شيئا فشيئا في البواقي الاول والثالية له بحسب اللزوم

ففي المثال السابق نرى أن الحد - ٢٠ لم يستعمل في الباقي الاول وانما استعمل في الباقي الثاني فمثل هذا الحد يستغنى عن تنزيله في الباقي الاول وينزل في الثاني

ومع كثرة التمرينات يتيسر للطالب الوقوف على ما يلزم تنزيله من الحدود في كل بان بحسب كل عملية

التنبيه الثاني بعد ترتيب المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيهما تكون القسمة غير ممكنة متى كان الحد الاول من المقسوم لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه أو كان الحد الاخير من المقسوم لا يقبل القسمة على الحد الاخير من المقسوم عليه أو كان الحد الاول من أي بان لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه

الثالث - متى توصلنا الى باق لا يمكن قسمة الحد الاول منه على الحد الاول من المقسوم عليه يعتبر الباقي المذكور هو باق القسمة ثم يكمل الخارج بكسر بسطه الباقي ومقامه المقسوم عليه

فلقسمة $س٢$ ح - $س٢$ ح + و على $س٢$ - و نجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{2+3}{2-3} & 2+3-2+3 \\
 & -2-3-2-3 \\
 \hline
 & 2+3-2-3 \\
 & 2+3-2-3 \\
 \hline
 & 2+3-2-3
 \end{array}$$

ويكون الخارج الحقيقي هو $2-3$ $\frac{2+3}{2-3} + 2-3$
 (الرابع) قد غيرنا في المثالين السابقين اشارات حاصل ضرب كل
 حد من حدود خارج القسمة في المقسوم عليه لزوم طرح تلك
 الحواصل من المقسوم أو الباقي كما تقتضيه قاعدة الطرح مرة ٢٨
 ولكن مع كثرة الثمرين يتيسر للطالب أن يضع الحاصل بدون
 تغير ويلاحظ التغير عقليا وقت اختصار الحدود المتشابهة كما في
 مرة ٢٩

قابلية قسمة كثيرة الحدود على ذات الحددين بدرجة أولى

(٦٦) قاعدة - باقى قسمة كثيرة الحدود الصحيحة بالنسبة الى
 $2+3$ على $2-3$ يساوى المقدار الناتج من استعاضة $2+3$ فيها
 بالمقدار $2-3$

أى أن باقى قسمة كثيرة الحدود $2+3$ على $2-3$ يساوى $2+3$...
 $2+3$ المرتبة بالنسبة للثمرين التنازليين لطرفي $2+3$ على
 ($2-3$) هو

$$2+3 + 2+3 + 2+3 + \dots + 2+3$$

وذلك لانه يمكن الاستمرار في القسمة الى أن ينتج باق درجة حرف
الترتيب فيه أقل من درجة حرف الترتيب في المقسوم عليه (لان
المقسوم عليه بدرجة أولى) وبناء عليه فلا يشتمل على سه فاذا
رغم للجزء الصحيح من الخارج بحرف خ والباقي بحرف ب يكون

$$ا سه + ب سه + د سه + ه سه + ز سه + ح سه + ط سه + ع سه = (سه - سه) + خ + ب$$

وحيث ان هذه المتساوية تكون حقيقية بأى مقدار يفرض الى
سه فاذا فرض أن سه = ح آلت الى ا ح + ب ح + د ح + ه ح + ز ح + ح ح + ط ح + ع ح

$$..... = (ح - ح) + خ + ب$$

ولما كان في هذه الحالة المقدار (ح - ح) خ معدوما كان

$$ب = ا ح + ب ح + د ح + ه ح + ز ح + ح ح + ط ح + ع ح$$

وهو المراد ايضاحه

مثلا باقى قسمة ٢ سه^٢ - ٤ سه^٢ + ٥ سه - ٤ على س - ٣ هو

$$٢٩ = ٤ - ٣ \times ٥ + ٣ \times ٤ - ٣ \times ٢$$

واذا أجريت عملية القسمة ترى أن الجزء الصحيح من الخارج هو

$$٢ س + ٢ س + ١١$$
 والباقي ٢٩

(٦٧) قاعدة اذا غير في كمية كثيرة الحدود هيصة بالنسبة الى
س الحرف س بالحرف ح وآلت بذلك الى صفر كانت قابلة
للقسمة على س - ح .

وذلك لانه لما كان الفرض أنها تنعدم من تغير س الى ح
 فينعدم الباقي وحينئذ تكون قابلة للقسمة على س - ح
 فكثيرة الحدود من $٢ - ٦س + ١١س^٢ - ٦س^٣$ تقبل القسمة
 على س - ح لانه اذا غير س بالمقدار ٣ تؤل الى $٢ - ٦س$
 $٢ - ٦س + ١١س^٢ - ٦س^٣$ أي $٢ - ٦س + ١١س^٢ - ٦س^٣$
 $٦٠ - ٦٠ = ٠$ وباجراء عملية القسمة نرى أن الخارج س
 $٣ - ٢س + ٢س^٢$

(٦٨) قاعدة - باقى قسمة كثيرة الحدود الصحيحة بالنسبة الى
 س على س - ح يساوى الناتج من استعاضة س بالمقدار
 ح -

ويستدل على ذلك كما سبق في غرة ٦٦

مثلا باقى قسمة $٣س^٤ + ٤س^٣ - ٢س^٢ - ٣س + ٢$
 على $(س + ٢)$ هو

$٣(٢ -) + ٤(٢ -) + ٢(٢ -) - ٢(٢ -) - ٣(٢ -) + ٢$
 $٢ + ٢س - ٤٨ - ٣٢ + ٨ + ٦ + ٢ = ٤٠ - ٤٠ = ٠$
 واذا أجريت عملية القسمة يرى أن الجزء الصحيح من الخارج ٣ س
 $٢س^٢ + ٢س - ٧$ والباقي ١٦

(٦٩) قاعدة - اذا غير في كية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة
 الى س الحرف س بالمقدار - ح وآلت بذلك الى صفر كانت
 قابلة للقسمة على س - ح

لانه لما كان الفرض أنها تؤل الى الصفر بتغير س الى - ح

فينعدم الباقي وحينئذ تقبل القسمة على $\delta + \epsilon$
 فكثيرة الحدود ϵ $\delta^2 + \epsilon^2 - 17\delta - 10\epsilon + 8$
 تقبل القسمة على $\delta + \epsilon$ لأنه اذا غير فيها δ بالمقدار ϵ
 تؤل الى

$$\epsilon^2 - (\delta - \epsilon) + 3 - (\delta - \epsilon)^2 - 17 - (\delta - \epsilon) + 8 - (\delta - \epsilon) \text{ أو } 8 - (\delta - \epsilon)$$

$012 - 192 - 272 - 40 - 8 - 012 - 012 = 0$
 واذا أجريت عملية القسمة يرى أن الخارج ϵ $\delta^2 - 5\delta + 2$
 $\delta + \epsilon - 2$

نتائج وقوانين عمومية

(٧٠) أولا - ذات الحدين $\delta^m - \epsilon^m$ تقبل القسمة على $\delta - \epsilon$

لأنه اذا غير فيها δ بالمقدار ϵ تؤل الى $\delta - \epsilon$ وهذا المقدار
 يساوى صفرا وبناء على قاعدة غرة ٦٧ تكون الكمية المفروضة
 قابلة للقسمة على $\delta - \epsilon$ وهذه القاعدة يعبر عنها عادة
 هكذا

فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على
 فاضلهما غير مرفوعتين

وعلى هذا اذا قسم $\delta^m - \epsilon^m$ على $\delta - \epsilon$ يرى أن الخارج
 $\delta^{m-1} + \delta^{m-2}\epsilon + \delta^{m-3}\epsilon^2 + \dots + \epsilon^{m-1}$

(٧١) ثانيا - ذات الحدين $س$ + $ح$ لا تقبل القسمة على

$س - ح$

لانه اذا غير فيها $س$ بالمقدار $ح$ تؤل الى $ح$ + $ح$ = $٢ ح$ وبناء

على قاعدة (غرة ٦٨) يكون $ح$ هو الباقي

ويعبر عن هذه القاعدة بما يأتي

مجموع الكميتين المرفوعتين الى قوة ما لا يقبل القسوة على

فاضلهما غير مرفوعتين

وعلى هذا اذا قسم $س^٢$ + $ح^٢$ على $س - ح$ ينتج الجزء الصحيح

من الخارج $س$ + $ح$ $س$ + $ح$ والباقي $ح^٢$

(٧٢) ثالثا - ذات الحدين $س - ح$ تقبل القسمة على

$س + ح$ اذا كان $م$ زوجيا ولا تقبل القسمة على $س + ح$

اذا كان $م$ فرديا

لانه اذا غير $س$ بالمقدار $ح$ تؤل الى $(س - ح) - ح$

فاذا كان $م$ زوجيا يكون $(س - ح)$ موجبا (غرة ٣٤) ويساوي

$ح$ ويؤل المقدار المذكور الى صفر وهذا يدل على أنها تقبل

القسمة على $س + ح$ (غرة ٦٩)

واذا كان $م$ فرديا يكون $(س - ح)$ سالبا (غرة ٣٤) ويساوي

$ح$ ويؤل المقدار المذكور الى $س - ح$ وهذا يدل على أنها

لا تقبل القسمة على $س + ح$ (غرة ٦٩) ويعبر عن هذه

القاعدة بما يأتي

فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على مجموعهما
اذا كانت درجة القوة زوجية ولا يقبل القسمة على ذلك المجموع
اذا كانت القوة فردية

(مثال ١) اذا فرض أن م زوجيا ويساوى ٤ يحدث

$$(س٤ - ح٤) : (س٣ + ح٣) = س٣ - ح٣$$

$$+ س٢ - ح٢$$

(مثال ٢) اذا فرض أن م فرديا ويساوى ٣ يحدث

$$(س٣ - ح٣) : (س٢ + ح٢) = س٢ - ح٢$$

$$- س٢ + ح٢$$

(٧٣) رابعا - ذات الحدين $س٣ + ح٣$ تقبل القسمة على
 $س٣ + ح٣$ اذا كان م فرديا ولا تقبل القسمة اذا كان م زوجيا
لانه اذا غير م بالمقدار $ح٣$ تول الى $(س٣ - ح٣)$ $س٣ + ح٣$ فاذا
كان م فرديا يكون $(س٣ - ح٣)$ سالبا (نمرة ٣٤) وتول ذات
الحدين الى صفرو هذا يدل على أنها قابلة للقسمة على $س٣ + ح٣$
كما في (نمرة ٦٩) واذا كان م زوجيا يكون $س٣ - ح٣$ موجبا
(نمرة ٣٤) وتول ذات الحدين الى $س٣ - ح٣$ وهذا يدل على أنها
لا تقبل القسمة على $س٣ + ح٣$ كما في (نمرة ٦٨)

ويعبر عن هذه القاعدة بما يأتي

مجموع الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على مجموع

هاتين اليكيتين اذا كانت درجة القوة فردية ولا يقبل القسمة على ذلك المجموع اذا كانت درجة القوة زوجية

مثال ١ اذا فرض ان $m = 3$ يحدث

$$(m^3 + x^3) : (m + x) = m^2 - mx + x^2$$

مثال ٢ اذا فرض ان $m = 2$ يحدث

$$(m^2 + x^2) : (m + x) = m - \frac{x^2}{m+x}$$

تمارين

المطلوب إيجاد خارج قسمة

$$(67) \quad x^2 \text{ على } x^6 - 10x^4 + 3x^2 - 6$$

$$2x^2 + x^4 + 8x^2$$

$$(67) \quad x^3 \text{ على } x^4 - 14x^2 + 6x + 10$$

$$6x^2 + 3x$$

$$(68) \quad x^2 \text{ على } x^6 - 7x^4 + 3x^2 - 6$$

$$18x^2 + 3x$$

$$(69) \quad 18x^2 \text{ على } x^6 - 9x^4 + 14x^2 - 11$$

$$6x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$(70) \quad \text{ما مقدار } 6x^2 - 6x^4 + 6x^6 - 6x^8$$

$$\text{بفرض أن } x = 4$$

$$(71) \quad \text{ابحث عن مجموع الكميات } x^6 + x^4 + x^2 + 6$$

المطلوب إيجاد خارج قسمة

$$(٧٢) \quad (ح^٢ ز + ح^٢ ز - ح^٢ ز) : ح ز ٦$$

$$(٢٤ صه - ١٨ صه + ١٥ صه) : ح ز ٦$$

$$\text{على } ح ز ٦ : (٤ ح ز ٨ + ٢ ح ز ٨ - ٢ ح ز ٨)$$

$$(٧٣) \quad (م م م + م م م - م م م) : م م م$$

$$٦ م م م : (٦ م م م + ٦ م م م - ٦ م م م)$$

$$(٧٤) \quad (١٥ ح ز ١٥ - ١٥ ح ز ١٥ + ١٥ ح ز ١٥) : ح ز ١٥$$

$$(٧٥) \quad (٢ ح ز ٢ - ٢ ح ز ٢ + ٢ ح ز ٢) : ح ز ٢$$

$$(٧٦) \quad (٦ ح ز ٦ + ٦ ح ز ٦ + ٦ ح ز ٦) : ح ز ٦$$

$$٦ ح ز ٦ - ٦ ح ز ٦ + ٦ ح ز ٦ : ح ز ٦$$

$$(٧٧) \quad (٢٥ ح ز ٢٥ - ١٨ ح ز ١٨ + ١٠ ح ز ١٠) : ح ز ١٠$$

$$\text{على } ح ز ١٠ : (٢٥ ح ز ٢٥ - ١٨ ح ز ١٨ + ١٠ ح ز ١٠)$$

$$(٧٨) \quad (٢٦ ح ز ٢٦ + ٢٦ ح ز ٢٦ + ٢٦ ح ز ٢٦) : ح ز ٢٦$$

$$٢٦ ح ز ٢٦ - ٢٦ ح ز ٢٦ + ٢٦ ح ز ٢٦ : ح ز ٢٦$$

$$(٧٩) \quad (١٥ ح ز ١٥ - ١٥ ح ز ١٥ + ١٥ ح ز ١٥) : ح ز ١٥$$

$$\text{على } ح ز ١٥ : (١٥ ح ز ١٥ - ١٥ ح ز ١٥ + ١٥ ح ز ١٥)$$

(٨٠) $\text{مه} - ٣ \text{مه} - ٨ \text{مه} - ٣ \text{مه} + \text{مه} \text{على مه}$

$+ ٢ \text{مه} + ١$

(٨١) ما باقى قسمة الكمية الآتية على $\text{ح} - ٢$ وعلى $\text{ح} - ٥$

وهى $٢٢ \text{ح} - ٢٤ \text{ح} + ١٢ \text{ح}$

(٨٢) ما باقى قسمة الكمية الآتية على $\text{مه} + ٣$ ٦ مه

$+ ٤$

وهى $\text{مه} - ٣ \text{مه} + ٥ \text{مه} - ١٢ \text{مه}$

(٨٣) ما الذى يلزم اضافته الى الكمية الآتية لتصبح قابلة

للقسمة على $\text{مه} - ٣$ وهى

$\text{مه} - ٤ \text{مه} + ٣ \text{مه} - ٢ \text{مه} + ٤$

(٨٤) المطلوب أن تبين بدون اجراء عملية القسمة أى الكميتين

$\text{ح} + ٧$ و $٦ \text{ح} - ٧$ تقبل القسمة على $\text{ح} - ٥$ وأيمهما تقبل

القسمة على $\text{ح} + ٥$

(٨٥) المطلوب بيان الكميات التى تقبل القسمة على $(\text{ح} + ٥)$

من الكميات الآتية

$\text{ح} - ٥$ $٦ \text{ح} + ٦$ $٦ \text{ح} + ١١$ $٦ \text{ح} - ١٢$ $٦ \text{ح} - ١٢$

مع بيان الباقي للكميات التى لا تقبل القسمة على $\text{ح} + ٥$

تحليل ذات الحدود الى عوامل

(٧٤) تمهيد اذا كان مقدار جبرى مكون من حاصل ضرب

كيتين صحيحتين أو أكثر فكل من هذه الكميات يسمى عاملا لهذا المقدار

(٧٥) تعريف - تحليل مقدار جبرى الى عوامل هو عبارة عن ايجاد العوامل الصحيحة التى اذا ضربت فى بعضها ينتج المقدار المذكور

ولا يقصد عادة من تحليل المقدار الجبرى الا ايجاد العوامل الصحيحة الجذرية

(٧٦) لما كان حاصل ضرب كل كيتين جبريتين أو أكثر لا يوجد بصورة واحدة نظرا لاختلاف عوامل كل حاصل فلا يتيسر اتخاذ قاعدة واحدة فى ايجاد العوامل ولذلك نذكر أكثر الطرق استعمالا فى التحليل على حسب أحوال الكميات فنقول

(٧٧) القاعدة الاولى - اذا احتوت جميع حدود الكمية المراد تحليلها على كمية مشتركة فيمكن قسمة جميع هذه الحدود على الكمية المشتركة وبذلك تقلل ذات الحدود الى مضروبين مثلا فى ذات الحدين $٣٢ - ٦٠$ يشاهد أن الكمية ٣٢ مشتركة بين حديهما فبقسمتهما على ٣٢ ينتج $٢ - ١٥$ واذا يكون $٣٢ - ٦٠ = ٣٢(٢ - ١٥)$ وبالمثل يكون $٥٠ - ١٥ = ٥(١٠ - ٣)$ $٥٠ - ١٥ = ٥(١٠ - ٣)$

(٧٨) القاعدة الثانية - تقدم بقرة (٤٠) أن $(٥ + ٣)$

$$= \text{ح} + \text{ح} ٢ + \text{ح} ٣ + \text{د} \text{ وبنمرة (٤١) أن } (\text{د} - \text{ح}) =$$

$$\text{ح} - \text{ح} ٢ + \text{ح} ٣ + \text{د}$$

فاذا كان المقدار الجبري مكتونا من مجموع مربعي كيتين ومضاظا اليه أو مطروحا منه ضعف حاصل ضربهما كان مساويا لربع مجموع هاتين الكيتين أو لربع الفرق بينهما

ويجب ملاحظة أن الحدين المربعين يكونان موجبين

$$\text{مثلا } \text{ح} + \text{ح} ٢ + \text{ح} ٣ + \text{د} = \text{ح} + \text{ح} ٣ + \text{د} = (\text{ح} + \text{د}) (\text{ح} + \text{ح} ٢ + \text{ح} ٣ + \text{د})$$

$$6 (\text{ح} + \text{ح} ٢ + \text{ح} ٣ + \text{د}) = \text{ح} ٩ + \text{ح} ٦ + \text{ح} ٣ + \text{د} 6$$

$$٢٥ \text{ ح} - \text{ح} ٢٠ + \text{ح} ٤ + \text{د} ٥ = (\text{ح} ٢ + \text{د} ٥) (\text{ح} ٢ - \text{د} ٢)$$

(٧٩) القاعدة الثالثة تقدم بنمرة (٤٣) أن

$$(\text{د} + \text{ح}) (\text{د} - \text{ح}) = \text{د} - \text{ح}$$

ويؤخذ من هذا أنه اذا كان المقدار الجبري مركبا من الفرق بين مربعي كيتين كان مساويا لحاصل ضرب مجموع هاتين الكيتين في الفرق بينهما

$$\text{فعلى هذا يكون } \text{ح} ٢٥ - \text{ح} ٤ = (\text{ح} ٢ + \text{د} ٥) (\text{ح} ٢ - \text{د} ٥)$$

$$\text{وأيا } ٢٦ \text{ ح} - \text{ح} ١ = (\text{ح} ٦ + \text{د} ١) (\text{ح} ٦ - \text{د} ١)$$

(٨٠) القاعدة الرابعة تقدم بنمرة (٤٦) أن

$$(١ - ب) (أ + ا ب + ب^٢) = أ^٢ - ب^٣ \text{ وبمنزلة } (٤٧) \text{ أن}$$

$$(١ + ب) (أ - ا ب + ب^٢) = أ^٢ + ب^٣$$

فيؤخذ من هذا أنه اذا كان المقدار الجبري مركبا من الفرق بين مكعي كيتين كان مساويا لحاصل ضرب الفرق بين هاتين الكميتين في المجموع الناتج من مربع الاولى وحاصل ضرب الاولى في الثانية ومربع الثانية

واذا كان المقدار الجبري مركبا من مجموع مكعي كيتين كان مساويا لحاصل ضرب مجموع هاتين الكميتين في الناتج من مربع الاولى نافضا حاصل ضربها في الثانية مضافا للباقي مربع الثانية فعلى هذا يكون $صه^٢ - صه^٣ = (صه - صه) (صه + صه) + صه^٢$

$$١٢٥ ح^٢ ز^٢ - ٨ هه^٢ = (٥ ز^٢ - ٢ هه) (٢٥ ح^٢ ز^٢ + ١٠ ح^٢ هه + ٤ هه^٢)$$

$$ح^٢ + ز^٢ = (ح + ز) (ح^٢ - ح ز + ز^٢)$$

$$٢٧ ح^٢ + ٩ و^٢ = (٣ ح^٢ + و) (٩ ح^٢ - ٣ و + و^٢)$$

(٨٩) القاعدة الخامسة - تقدم بنمرة ٤٨ أن

$$(١ + سه) (١ + سه) = (سه + ب) (سه + ا ب + ب^٢)$$

فاذا كان المقدار الجبري مركبا من مربع كية ومن مجموع كيتين أخريين مضروبا في تلك الكمية ومن حاصل ضرب الكميتين

المذكورتين أمكن تحليله الى عاملين كما في الامثلة الآتية
 المثال الاول $س^٢ + ١١س + ٢٤$ فنعتبر أن ٢٤ عبارة عن
 ١١ و ٢٤ عبارة عن $(١ + ١٠)$ ثم نبحث عن عددين حاصل
 ضربهما ٢٤ ومجموعهما ١١ وحيث أن أزواج الاعداد التي
 حاصل ضربها ٢٤ هي $١, ٢٤$ و $٢, ١٢$ و $٣, ٨$ و $٤, ٦$ ولم يكن
 فيها ما هو مجموع ١١ الا $٨, ٣$ فاذن يكون

$$س^٢ + ١١س + ٢٤ = (س + ٨)(س + ٣)$$

المثال الثاني ليكن المطلوب تحليل $س^٢ - ٧س + ١٠$
 فنعتبر أن ١٠ هو عبارة عن $١٠ - ٠$ و ٧ هو $١ + ٦$ فنبحث
 عن عددين حاصل ضربهما ١٠ ومجموعهما -٧ وحيث أن حاصل
 ضربهما موجب فيكونان اما موجبيين أو سالبين ولكن حيث
 كان مجموعا سالبا فيكونان سالبين وأزواج الاعداد السالبة التي
 حاصل ضربها ١٠ هي $-١, -١٠$ و $-٢, -٥$ وحيث
 ان مجموع هذا الزوج الاخير هو -٧ يكون

$$س^٢ - ٧س + ١٠ = (س - ٥)(س - ٢)$$

المثال الثالث ليكن المطلوب تحليل $س^٢ + ٣س - ١٨$
 فهنا $١٨ = ٦ + ١٢$ فنبحث عن عددين
 حاصل ضربهما -١٨ ومجموعهما ٣ وحيث أن حاصل ضربهما
 سالب فيكون أحدهما موجبا والاخر سالبا وأزواج
 الاعداد التي حاصل ضربها -١٨ هي $١, -١٨$ و $٢, -٩$ و $٣, -٦$ و $٦, -٣$

وحيث ان مجموع - ٣, ٦ هو ٣ فاذن يكون

$$\text{مه}^1 + ٣ \text{ مه} - ١٨ = (٦ + \text{مه}) (٣ - \text{مه})$$

وليتنبه الى أنه لا يمكن استعمال هذه الطريقة الا في أحوال
خصوصية

لانه في مثل كثيرة الحدود مه^٢ + ٦ مه + ٧ اذا أريد تطبيق
القاعدة السابقة يلزم البحث عن عددين حاصل ضربهما ٧
ومجموعهما ٦ وحيث أنه لم توجد أعداد صحيحة محقة لهذين
الشروطين فلا يتأتى تحليل الكمية المذكورة الى عاملين بهذه
الطريقة

(٨٢) القاعدة السادسة - يمكن تحليل المقدار الجبري الى
مضروبين أو أكثر بتكرار أخذ مضروب مشترك في بعض
حدوده

مثلا - في المقدار مه^٢ - ٥ مه + ٤ مه - ٤

يمكن أخذ مه مضروبا مشتركا في الحدين الاولين و ٤ مضروبا
مشتركا في الحدين الآخرين ويكون مه^٢ - ٥ مه + ٤ مه + ٤ مه
- ٤ مه = مه (مه - ٥) + ٤ (مه - ٤)
ثم يؤخذ مه - ٤ مضروبا مشتركا فيحدثن (مه - ٤)
(مه + ٤)

مثال آخر ٦ مه^٢ - ٩ مه + ٤ مه + ٤ مه - ٦ مه يوضع
هكذا

$$(٦ مه^2 - ٩ مه) + (٤ مه + ٤ مه - ٦ مه)$$

$$٣ \text{ سه } (٢ \text{ سه} - ٣) + ٢ \text{ ب } (٢ \text{ سه} - ٣) \text{ أو}$$

$$(٢ \text{ سه} - ٣) (٢ \text{ ب} + ٣ \text{ سه})$$

مثال آخر $ح ه + ه د - ل ح - ل د$ نأخذ $ح$ مضروباً

مشتركا في الحدود المشتملة عليه $و د$ مضروباً مشتركا كذلك

$$\text{فينتج } ح ه + ه د - ل ح - ل د = ح (ه - ل) (ه - ل)$$

$$+ د (ه - ل) \text{ ثم نأخذ } ه - ل \text{ مضروباً مشتركا في هذا}$$

المقدار فينتج

$$ح ه + ه د - ل ح - ل د = ح (ه - ل) (ه - ل)$$

(٨٣) تنبيه ١ وهنالك طرق أخرى تحايله في تحليل الكميات

الى عوامل ولكنها ترجع في الغالب الى ما تقدم

مثلا الكمية $سه - ٤ سه + ٣$ يمكن كتابتها هكذا

$$سه - ٢ سه + ١ + ٢ سه - ١ + ٢$$
 وهذه يمكن كتابتها هكذا

$$(سه - ١) (٢ سه - ١) + ٢$$
 وبأخذ $سه - ١$ مضروباً

مشتركا يحدث

$$(سه - ١) (٢ سه - ١) + ٢ (سه - ١) (سه - ١)$$

(٨٤) تنبيه ٢ وبالقياص على ذلك يمكن تحليل مقدار جبري

مراعاة لقواعد غرة ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٧٣

تسارين

المطلوب إيجاد عوامل الكميات الآتية

$$(٨٦) ح^٢ - ح سه ٦ سه^٢ - سه^٢ ٦ سه - ح ٢ - ح ٢$$

$$(٨٧) ح^٢ - ح ب ٧ ه + ه ٨ سه - سه ٢ سه$$

$$(88) \quad 6^2 - 2^2 + 4^2 - 6^2 + 8^2 - 10^2 + 12^2 - 14^2 + 16^2 - 18^2 + 20^2 - 22^2 + 24^2 - 26^2 + 28^2 - 30^2 + 32^2 - 34^2 + 36^2 - 38^2 + 40^2 - 42^2 + 44^2 - 46^2 + 48^2 - 50^2 + 52^2 - 54^2 + 56^2 - 58^2 + 60^2 - 62^2 + 64^2 - 66^2 + 68^2 - 70^2 + 72^2 - 74^2 + 76^2 - 78^2 + 80^2 - 82^2 + 84^2 - 86^2 + 88^2 - 90^2 + 92^2 - 94^2 + 96^2 - 98^2 + 100^2$$

$$(89) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(90) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(91) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(92) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(93) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(94) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(95) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(96) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(97) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99$$

$$(٩٨) \text{ مه' + مه' ٤ + مه' ٣ - مه' ٤ + مه' ٣}$$

$$\text{مه' ٨ + مه' ٨}$$

$$(٩٩) \text{ مه' - مه' ٨ + مه' ١٥ + مه' ١١ - مه' ١٨}$$

$$\text{مه' ٩ + مه' ٢٠}$$

$$(١٠٠) \text{ مه' + مه' ٢ - مه' ٣ + مه' ٤ - مه' ٥}$$

$$\text{مه' ٦ + مه' ٦}$$

$$(١٠١) \text{ ح' + ح' + ح' ٦ + ح' ٦ - ح' ٦}$$

$$\text{ح' ٦ - ح' ٦}$$

$$(١٠٢) \text{ ح' ٦ + ح' ٦ - ح' ٦ + ح' ٦ + ح' ٦}$$

$$\text{ح' ٦ + ح' ٦ + ح' ٦}$$

$$(١٠٣) \text{ مه' ٢ + مه' ٢ + مه' ٢ + مه' ٢ - مه' ٢}$$

$$\text{مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢}$$

$$(١٠٤) \text{ ح' - مه' ٢ + مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢ - مه' ٢}$$

$$\text{مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢}$$

$$(١٠٥) \text{ مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢ + مه' ٢ - مه' ٢}$$

$$\text{مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢ - مه' ٢ + مه' ٢}$$

الكسور الجبرية

(٨٥) تمهيد متى كان مقدار جبري غير قابل للقسمة على

مقدار جبري آخر بين الخارج بكسر بسطه المقسوم ومقامه

المقسوم عليه

فإذا كان المقدار $\frac{٢٤}{٣٥}$ حراً غير قابل للقسمة على حراً هـ يمين
الخارج هكذا $\frac{٢٤}{٣٥}$ ومن هنا يؤخذ التعريف الآتي

(٨٦) تعريف - الكسر الجبري يدل على خارج قسمة
بسطه على مقامه وكل من حدى الكسر الجبري قد يكون كمية
صحيحة أو كسرية موجبة أو سالبة

(٨٧) لا يتغير مقدار الكسر الجبري بضرب حديه في كمية
واحدة ولا يقسمتهما على كمية واحدة فالكسر

$$\frac{٢٥}{٣٨} = \frac{٢٥ \times ٢٥}{٣٨ \times ٢٥} = \frac{٢٥}{٣٨} = \frac{٢٥}{٤٠}$$

وينتج من ذلك أنه يمكن اختزال الكسر الجبري وتجنيس الكسور
بطرق مشابهة للطرق الحسابية

(٨٨) اختزال الكسر - نقسم حديه على كمية واحدة يقبلان
القسمة عليها ونجمل الخارجين حدين للكسر الجديد

$$\frac{٣٣}{٢٤} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$$

المثال الاول

$$\frac{(٥-٢٢)(٥+٢٢)هـ}{(٥+٢٢)(٥+٢٢)و} = \frac{(٥-٢٤)هـ}{(٥+٢٤+٢٤+٢٤)و} = \frac{(٥-٢٢)هـ}{(٥+٢٢)و} =$$

(٨٩) تجنيس الكسور - نضرب حدى كل كسر في حاصل
ضرب مقامات الكسور الاخر

$$\frac{٥}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}$$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{١٥}$$

$$\frac{٤}{١٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٨}{٧٥}$$

(٩٠) يمكن تجنيس الكسور بالبحث عن المضاعف البسيط لمقاماتها وضرب حدى كل كسر فى خارج قسمة المضاعف البسيط على مقامه

ولايجاد المضاعف البسيط لثلاثة حدود محال مكرراتها العددية الى عوامل أولية ثم تؤخذ جميع العوامل الرقية والحرفية والمشتراك يؤخذ بأعلى أس لحاصل ضربها هو المضاعف البسيط

فلنجيب الكسور $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 12}$ $\frac{3}{8 \cdot 2}$ $\frac{6}{5 \cdot 9}$

نہجث عن المضاعف البسيط المقامات فجدد ۷۲ ح ۱۵ هـ ثم نفسه
على جميع المقامات تحدث الخوارج ۶ هـ ۹۶ ح ۱۵ ۸۶ ح ۱۵
ثم ضرب بدی کل کسری الخوارج

المنظره فيحدث

جميع الكسور

(٩١) قاعدة - بجمع الكسور يلزم تجنيصها اذا كانت المقامات مختلفة ثم نجمع البسوط ونجعل المجموع بسطا على المقام المشترك

$$\frac{x+s+1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{u}{s} + \frac{v}{s} + \frac{1}{s} \quad (\text{مثال ۲})$$

طرح الكسور

(۹۲) قاعدة - لطرح کسر من آخر بلزم تجنیسهما اذا كان

المقامان مختلفين ثم نطرح بسط كسر المطروح من بسط كسر المطروح منه ونجعل الناتج بسطا على المقام المشترك

$$\frac{7}{5} - \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{21}{15} - \frac{10}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{(مثال ٢)} \quad \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{9}{15} - \frac{5}{15} \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{15} = \frac{15}{30} - \frac{8}{30} = \frac{7}{30}$$

ضرب الكسور

(٨٧) قاعدة - لضرب كسر في كسر نضرب البسط في البسط والمقام في المقام ونجعل حاصل ضرب البسطين بسطا وحاصل ضرب المقامين مقاما

$$\text{مثلا} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \quad \text{أو} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \quad \text{أو} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

قسمة الكسور

(٨٨) قاعدة - لقسمة كسر على كسر يضرب كسر المقسوم في عكس كسر المقسوم عليه

$$\text{مثلا} \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{أو} \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

(٨٩) تنبيه - يؤخذ مما تقدم أن كل كسر مسبوق بعلامة ناقص يمكن اعتباره سالب أو أن بسطه سالب ومقامه موجب أو بالعكس

تمارين

(١٠%) اختصر الكسور

$$\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \cdot \frac{5+5\gamma_1+\gamma}{5-\gamma} \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{5\gamma_0}{5\gamma_1+10} \cdot (1.7) + \frac{1}{1+\gamma} + \frac{1}{1-\gamma}$$

(١٠٨) اطرح $\frac{2}{3}$ من $6\frac{1}{3}$ $\frac{112}{327}$ من $6\frac{110}{327}$ $\frac{1}{327}$

(۱۰۹) اضرب $\frac{7}{9} \times \frac{1}{6}$ من $\frac{12}{18}$

$\frac{7}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{7 \times 1}{9 \times 6} = \frac{7}{54}$

(۱۱۰) اقسام: $\frac{57}{9} : \frac{23}{9} : \frac{1}{9} : \frac{36}{9}$ $\frac{57}{9} - \frac{23}{9} = \frac{34}{9}$ $\frac{34}{9} - \frac{1}{9} = \frac{33}{9}$ $\frac{33}{9} - \frac{36}{9} = -\frac{3}{9}$

المطلوب تحويل الاوضاع الآتية الى أوضاع مختصرة

$$\frac{\frac{-5}{1} + \frac{1}{0}}{\frac{5}{0} - 1} \quad 6 \quad \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{0}} + 6 \frac{1}{\frac{1}{0} + 1} - 7 \quad (III)$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad 6 \frac{\frac{23}{\sqrt{2}} + 2}{\frac{23}{\sqrt{2}} + 2} \quad 6 \frac{\frac{27}{\sqrt{2}} + 23}{\frac{27}{\sqrt{2}} + 23} \quad (115)$$

$$(113) \left(\frac{\frac{3}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}} \div \left(\frac{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}} - \frac{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}} \right) \right)$$

$$6 \frac{\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}}$$

$$(114) \left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} \right) \div \left[\frac{1}{\text{س}} \left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} \right) \right]$$

$$6 \left[\frac{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}} \right]$$

$$(115) \frac{9 - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{س}} - 1} \div \frac{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}}$$

$$\frac{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}} - \frac{1}{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}$$

المعادلات ذات الدرجة الاولى

تعريف

(٩٠) المتساوية - هي اجتماع كيتين متساويتين مفصولتين بعلامة التساوى

$$\text{مثل } ٢ = ١ + ١$$

وما قبل علامة التساوى يسمى الطرف الاول وما بعدها يسمى الطرف الثانى

(٩١) المتطابقة - هي متساوية ظاهر تساويها

$$\text{مثل } ١٢ = ١٢ \quad ٥٦ + ٤ = ٤ + ٥٦$$

ويطلق اسم متطابقة على التساوي بين وضعين جبريين بحيث اذا أعطى للحروف الداخلة فيهما مقادير متحدة لا يزال التساوي باقيامهما كانت هذه المقادير

$$\text{مثل } (٥ + ٣) = ٥ + ٣ = ٨$$

(٩٢) المعادلة هي متساوية لا يتحقق تساويها الا باستبدال المجاهيل الداخلة فيها بمقادير خصوصية

$$\text{مثل } ٥ \text{ سم} - ١ = ١٩$$

فانه لا يتحقق تساويها الا اذا جعل سم = ٤ لانه بذلك تصبح

$$٥ \times ٤ - ١ = ١٩ \text{ أى } ١٩ = ١٩$$

(٩٣) أنواع المعادلة - المعادلة نوعان رقمية وحرفية فالمعادلة الرقمية هي ما كانت المقادير المعلومة فيها مبينة بأرقام والمعادلة الحرفية ما كانت المقادير المعلومة فيها مبينة بحروف

فالمعادلة ٥ سم - ١ = ١٩ رقمية والمعادلة ٥ سم - ٣ = ٨ حرفية

(٩٤) حل المعادلة - هو البحث عن عدد اذا وضع بدل المجهول يجعلها متطابقة وهذا العدد يسمى جذر المعادلة فالمعادلة ٥ سم - ١ = ١٩ جذرها ٤

(٩٥) درجة المعادلة - هي أعظم درجات حدودها بالنسبة للمجاهيل الداخلة فيها

فالمعادلة ٥ سم - ١ = ١٩ من الدرجة الاولى والمعادلة ٣ سم^٢ + ٥ سم = ٨ من الدرجة الثانية

والمعادلة ٤ م ص ٣ م = ٢ م - ٥ م من الدرجة الثانية

قواعد أساسية

(٩٦) قاعدة لا يتغير جذر المعادلة اذا ضم أو طرح من

طرفها عدد واحد

فالمعادلة ٥ م - ١ = ١٩ جذرها ٤ واذا أضيف الى طرفها

٢ يحدث

٥ م + ١ = ٢١ وجذر هذه المعادلة هو ٤ أيضا

واذا طرح من طرفها ٢ يحدث

٥ م - ٣ = ١٧ وجذر هذه المعادلة هو ٤ أيضا

(٩٧) ينتج من هذه القاعدة أولا أنه لتحويل حد من طرف

لطرف يلزم تغير اشارته لانه اذا كان الحد المذكور موجبا كان

تحويله من طرف لطرف عبارة عن طرحه من الطرفين وان كان

سالبا كان تحويله عبارة عن اضافته للطرفين

ففي المعادلة ٥ م - ١ = ١٩ يمكن تحويل - ١ الى الطرف

الثاني وتصبح ٥ م = ١٩ + ١

ثانيا لا تتغير المعادلة بتغير اشارات جميع حدودها

فالمعادلة ٥ م - ١ = ١٩ تكافئ ٥ م + ١ = ١٩ -

ثالثا يمكن تحويل جميع حدود المعادلة الى طرف واحد

وجعل الطرف الثاني صفرا

(٩٨) قاعدة لا يتغير جذر المعادلة اذا ضرب طرفها في مقدار

واحد أو قسمها على مقدار واحد

فالمعادلة $\frac{x^2}{9} + 8 = \frac{x}{3} + 9$ جذورها ١٥

واذا ضرب طرفها في ٣ ينتج

$\frac{x^2}{3} + 24 = x + 27$ وجذرها ١٥ أيضا
واذا قسم طرفها على ٣ ينتج

$\frac{x^2}{9} + 8 = \frac{x}{3} + 9$ او
 $\frac{x^2}{9} + 4 = \frac{x}{3} + 5$ وجذرها ١٥ أيضا
(٩٩) تنبيه يشترط أن لا يكون المقدار الرقى للضروب فيه
معدوما لانه بذلك يدخل في المعادلة حلول غريبة (أى مقادير
تحقق المعادلة الجديدة ولا تحقق المعادلة الاصلية) ويتأق ذلك اذا
كانت كمية المضروب فيه محتوية على المجهول

مثلا في المعادلة $3 - x = 15 - 2x$ (١) التي
جذرها ١٢ اذا ضرب طرفها في $1 - x$ يحدث
 $(3 - x)(1 - x) = (15 - 2x)(1 - x)$
 $[1] (1 - x)$

وهذه المعادلة تحقق أولا بجعل $x = 12$ وبجعل $x = 1$
والمقدار الثانى نشأ من ضرب المعادلة في $1 - x$ اذ يفرضه
مساويا لصفر يكون $(1 - x) = 0$ ومنه $x = 1$

وحيث ان هذا المقدار يحل به المعادلة (٢) دون المعادلة (١)
فهو حل غريب

ومن هنا ينتج أنه اذا ضرب طرفا المعادلة في كمية مشتركة على المجهول لزم تسوية هذه الكمية بصفر والبحث عن حلول هذه المعادلة فما كان منها محققا للمعادلة الحادثة من الضرب ولا يحقق المعادلة الاصلية يكون حلا غريبا ينبغي حذفه

(١٠٠) حذف مقامات معادلة - ينتج مما تقدم أنه لحذف مقامات معادلة تضرب جميع حدودها في المقام المشترك للكسور الداخلة فيها

مثال ١ لحذف مقامات المعادلة $\frac{٣}{٤} + ٨ = \frac{٣}{٥} + ٨$ فنضرب طرفي المعادلة في ٢٠ فننتج $١٥ + ١٦٠ = ١٢ + ١٦٠$

مثال ٢ لحذف مقامات المعادلة $\frac{٣}{١٥} + ٧ = \frac{٣}{١٥} + ٧$ فنضرب طرفي المعادلة في ١٥ فننتج $٣ + ١٠٥ = ٣ + ١٠٥$

مثال ٣ لحذف مقامات المعادلة $\frac{٣}{١٥} + ٧ = \frac{٣}{١٥} + ٧$ فنضرب طرفي المعادلة في ١٥ فننتج $٣ + ١٠٥ = ٣ + ١٠٥$

ومن هنا يؤخذ أنه لحذف مقامات معادلة يكفى أن يضرب بسط كل حد كسرى في خارج قسمة المضاعف البسيط للمقامات على مقامه وكل حد صحيح في المضاعف البسيط لها

(حل المعادلات ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد)

(١٠١) قاعدة - لحل معادلة بدرجة أولى ومجهول واحد
يلزم أولاً حذف المقامات والافواس ان وجدت - ثانياً
تحويل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المشتملة
على المعاليم الى طرف آخر - ثالثاً اختصار الحدود المشتملة على
المجهول الى حد واحد ان كانت المعادلة رقية أو أخذ المجهول
مضروباً مشتركاً ان كانت المعادلة حرفية - رابعاً قسمة الطرفين
على مكرر المجهول

مثال ١ ليكن المطلوب حل المعادلة

$$\begin{aligned} ٥س - ١ &= ١٩ \text{ تحول } ١ \text{ الى الطرف الثاني فيحدث} \\ ٥س &= ٢٠ \text{ ثم نقسم الطرفين على مكرر المجهول وهو } ٥ \\ \text{فينتج} \quad ٤ &= س \end{aligned}$$

مثال ٢ ليكن المطلوب حل المعادلة

$$\begin{aligned} \frac{٢س}{٥} + ٨ &= \frac{س}{٣} + ٩ \text{ نحذف المقامات فيحدث} \\ ٦س + ١٢٠ &= ٥س + ١٣٥ \text{ ثم تحول } ٥س \text{ الى} \\ \text{الطرف الاول و } ١٢٠ &\text{ الى الثاني فيحدث} \\ ٦س - ٥س &= ١٣٥ - ١٢٠ \text{ أو} \\ ١٥ &= س \end{aligned}$$

المثال الثالث ليكن المطلوب حل المعادلة

$$\begin{aligned} \frac{٧(س-٢)}{٤} + ٣ &= \frac{٥(س+٢)}{٨} + ٥ \text{ نحذف} \\ \text{المقامات فيحدث} \\ ١٤(س-٢) + ٢٤ &= ٥(س+٢) + ٤٠ \end{aligned}$$

ثم تحذف الافواس يحدث

$$١٤ \text{ سم} - ٢٨ + ٢٤ = ٥ \text{ سم} + ١٠ + ٤٠ \text{ وبالتحويل}$$

يحدث

$$١٤ \text{ سم} - ٥ \text{ سم} = ١٠ + ٤٠ + ٢٨ - ٢٤ \text{ وبالاختصار}$$

$$\text{يحدث } ٩ \text{ سم} = ٥٤ \text{ أو}$$

$$\text{سم} = ٦$$

المثال الرابع ليكن المطلوب حل المعادلة

$$\frac{\text{سم}}{٢} = ٣ - \frac{\text{سم}}{١} \text{ تحذف المقامات فيحدث}$$

$$\text{سم} = ١ ب - ٣ ب \text{ سم} \text{ وبالتحويل يحدث}$$

$$١ \text{ سم} + ٣ ب \text{ سم} = ١ ب - ٣ \text{ سم} \text{ نأخذ سم مضروباً مشتركاً فيحدث}$$

$$(١ + ٣) \text{ سم} = ١ ب - ٣ \text{ سم} \text{ ثم نقسم الطرفين على } ١ + ٣$$

$$\frac{١ ب}{١ + ٣} = \text{سم}$$

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

$$(١١١) ٣ \text{ سم} - ٢٨ = ٣٥$$

$$(١١٧) ٦ \text{ سم} - ١٢ = ٤٨ - ٤ \text{ سم}$$

$$(١١٨) ١٢ - ٣ (٢ - \text{سم}) = ٢ (٤ + \text{سم}) - ١٥$$

$$(١١٩) ١ = [٤ (٢ + \text{سم}) - (١ - \text{سم})] - ١٥$$

$$(١٢٠) ١٢ \text{ سم} - ٣٨ = ٤ + \frac{٥ - \text{سم}}{٣}$$

$$0 = 36,20 - \frac{س^3}{2} + \frac{س^5}{3} \quad (121)$$

$$10,0 = \frac{س^4}{3} + \frac{س}{2} - \frac{س^5}{5} \quad (122)$$

$$4 = \frac{17-س^{11}}{30} - \frac{18+س^7}{10} + \frac{س^5}{12} \quad (123)$$

$$9 = \frac{س}{10} - \frac{17-س^5}{12} + \frac{4-س^3}{14} \quad (124)$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3-س^2}{5-س^2} \quad (125)$$

$$\frac{8}{9} = \frac{\frac{1}{3} - س^7}{\frac{3}{4} - س^9} \quad (126)$$

$$\frac{12}{3-س^2} = \frac{3}{1-س^4} \quad (127)$$

$$5 = 7 - س^2 \quad (128)$$

$$7 - 5 = 7 - س^2 \quad (129)$$

$$1 = \frac{س}{7} + \frac{س}{5} \quad (130)$$

$$1 = \frac{س}{5} - \frac{س}{7} + \frac{س}{5} \quad (131)$$

$$س^2 = \frac{7-س^2}{5} \quad (132)$$

$$7 - 5 = \frac{س^2-س^2}{7+5} \quad (133)$$

$$\frac{1}{7+5} = \frac{7+5}{س^2} \quad (134)$$

$$= (7+5) 7 - (7+س^2) (5+س^2) \quad (135)$$

$$\frac{7}{5} + 7$$

حل المسائل بواسطة علم الجبر

(١٠٢) تمهيد لحل مسألة بواسطة علم الجبر يلزم أولاً وضعها

على صورة معادلة أو عدة معادلات ثانياً حل هذه

المعادلة أو المعادلات

أما وضع المسئلة على صورة معادلة أو أكثر فلا يقع تحت قاعدة وإنما بكثرة التمرين يتيسر للطالب وضع المسائل على هيئة معادلات ومع ذلك فنذكر بعض ملحوظات للاعتانة بها في مبدأ الامر فنقول

يستبدل المجهول أو المجاهيل الداخلة في المسئلة بحرف أو حروف ثم يتأمل جيدا في منطق المسئلة للبحث عن الارتباطات التي بين المجهول أو المجاهيل والكميات المعلومة وتبين هذه الارتباطات بالعلامات الجبرية فبذلك يتوصل الى تكوين معادلة أو معادلات

وتتميز المسائل أولا بعدد مجاهيلها ثانيا بدرجة المعادلات التي تستعمل لحلها ثم اذا كانت المسئلة لا تحتاج الا الى معادلة واحدة ذات مجهول واحد وكانت درجتها بالنسبة لذلك المجهول هي الدرجة الاولى سميت المعادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد وأما حل المعادلة (اذا كانت بدرجة أولى ومجهول واحد) فقد سبق الكلام عليه بنمرة (١٠١) واذا كان غير ذلك فسيأتى الكلام عليه

حل مسائل ذات درجة أولى ومجهول واحد

(١٠٣) المسئلة الاولى - ما هو العدد الذي اذا أضيف الى ثلثه خمسة والى نفسه ثلاثة كان مجموع ذلك مساويا لثاني هذا العدد

الحل اذا رمز بحرف س للعدد المطلوب كان ثلثه مضافا اليه ٥ هو $\frac{س}{٣} + ٥$ وخمسه مضافا اليه ٣ هو $\frac{س}{٥} + ٣$ وحيث ان مجموع هذين المقدارين يلزم أن يكون مساويا لثلاثي هذا العدد أي المقدار $\frac{س}{٣}$ تحدث المعادلة

$$\frac{س}{٣} = ٣ + \frac{س}{٥} + ٥ + \frac{س}{٣}$$

وبحلها يحدث س = ٦٠

(١٠٤) المسئلة الثانية - تليذ فرق تفاحا على ثلاثة من رفقائه فأعطى الاول $\frac{٢}{٩}$ التفاح زائدا تفاحه وثلثا وأعطي الثاني $\frac{٣}{٧}$ التفاح ناقصا تفاحه وسبعما وأعطي الثالث الباقي وبذلك كانت أنصبتهم متساوية فكم كان عدد التفاح الجواب نفرض أن عدد التفاح س فيكون ما أعطاه الاول هو $\frac{س}{٩} + \frac{١}{٣}$ وما أعطاه الثاني هو $\frac{س}{٧} - \frac{١}{٧}$ وحيث أن الانصبة متساوية فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{س}{٩} + \frac{١}{٣} = \frac{س}{٧} - \frac{١}{٧}$$

ولحلها يحول كل عدد صحيح وكسر الى عددي كسري فينتج

$$\frac{س}{٩} + \frac{١}{٣} = \frac{س}{٧} - \frac{١}{٧} \quad \text{ثم تضرب الطرفين}$$

في ٦٣ فيحدث

$$١٤ س + ٨٤ = ٢٧ س - ٧٢ \quad \text{وبالتحويل يحدث}$$

$$١٤ س - ٢٧ س = - ٧٢ - ٨٤ \quad \text{أو}$$

$$- ١٣ س = - ١٥٦ \quad \text{وبتغير اشارتي الطرفين يحدث}$$

$$١٣ س = ١٥٦ \quad \text{أو}$$

س = ١٢

التحقيق - أن ما أخذناه الاول $\frac{2}{3} \times ١٢ = ٨$ + $\frac{1}{3} = ١$ أي ٩ وما أخذناه الثالث هو الباقي أي ٤ تقاطح

(١٠٥) المسئلة الثالثة - حنفية تملأ حوضاً في زمن ٥ ساعة وأخرى تملؤه في ٥ ساعة فما مقدار الزمن الذي يملأ فيه هذا الحوض اذا سلطت عليه الحنفيتان في آن واحد

الحل نرمز للزمن المطلوب بحرف س ثم يقال حيث ان الحنفية الاولى تملؤه في ٥ ساعة فتملاً في الساعة $\frac{1}{5}$ منه وتتملاً في الزمن س المقدار $\frac{1}{5} \times س$ أي $\frac{س}{5}$ من الحوض وبمثل ذلك تتملاً الحنفية الثانية في الزمن س المقدار $\frac{س}{5}$ وحيث ان مجموع هذين المقدارين يلزم أن يكون مساوياً للحوض فتحدث المعادلة

$$\frac{س}{5} + \frac{س}{5} = ١$$

ولحلها نحذف المقام فيحدث $س + س = ٥$

وبأخذ س مضروباً مشتركاً يحدث

$$(س + س) = ٥ \quad س = ٥ \quad \text{وبقسمة الطرفين على } ٥ + ٥$$

يحدث

$$\frac{٥}{٥ + ٥} = س$$

أعني أن الزمن المطلوب يساوى حاصل ضرب الزمنين المعطيين مقسوماً على مجموعهما

تنبيه الناتج المذكور يسمى قانونا جبريا اذ به تحل جميع المسائل المشابهة لهذه المسئلة التي لا تختلف عن بعضها الا في المقادير العددية وهذا من فوائده ومزايا علم الجبر فاذا فرض أن حوضا تملأه خنفيه في مدة ٥ ساعات وأخرى في ٣ ساعات وأريد معرفة الزمن الذي يملأ فيه هذا الحوض بالخنفتين معا يكفي أن نضع في القانون السابق بدلا عن ٥ 6 ٥ العددين ٣ 6 ٥ فيحدث

$$\text{سه} = \frac{3 \times 5}{3+5} = \frac{15}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \text{ ساعة}$$

(١٠٦) المسئلة الرابعة ما هو العدد اللازم اضافته الى حدى

الكسر $\frac{c}{d}$ ليكون الناتج مساويا للكسر $\frac{e}{f}$

الحل نرمز لهذا العدد بحرف سه فعلى حسب منطق المسئلة

$$\text{تحدث المعادلة } \frac{e}{f} = \frac{\text{سه} + c}{d + \text{سه}}$$

ولحلها يخذف المقام فيحدث

$$e(d + \text{سه}) = f(\text{سه} + c) \Rightarrow ed + e\text{سه} = f\text{سه} + fc$$

مضروبا مشتركا يحدث

$$(e - f)\text{سه} = fc - ed \Rightarrow \text{سه} = \frac{fc - ed}{e - f}$$

مكرر المجهول ينتج

$$\text{سه} = \frac{fc - ed}{e - f}$$

أعني يضرب بسط الكسر الجليد في مقام الكسر الاصلى

ويطرح من الجاصل حاصل ضرب بسط الكسر الاصلى في مقام

الكسر الجليد ويقسم الباقي على الفرق بين مقام وبسط الكسر

الجليد وهذا قانون عام تحل بواسطته جميع المسائل المشابهة لهذه

المسئلة التي لا يختلف بعضها عن بعض الا في المقادير العددية
وهذا من مزاي علم الجبر

فاذا فرض أن $\frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ و $\frac{6}{5} = \frac{2}{3}$ تكون الكمية
المطلوبة هي $\frac{5 \times 6 - 2 \times 2}{4 - 1} = \frac{20 - 4}{3} = 6$ والتحقق واضح
واذا فرض أن $\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ و $\frac{6}{5} = \frac{1}{4}$ تكون الكمية
المطلوبة هي $\frac{2 \times 1 - 1 \times 1}{1 - 1} = 2$

(١٠٧) المسئلة الثامنة - تصدق شخص بمبلغ على جلة
فقراء فأعطى الفقير الاول قرشا واحدا وخمس الباقي معه ثم
أعطى الفقير الثاني قرشين وخمس الباقي بعد ذلك وأعطى الثالث
ثلاثة قروش وخمس الباقي بعد ذلك وهكذا وبذلك كانت الانصبة
متساوية فكم كان المبلغ وكم عدد الفقراء

الحل - نفرض أن المبلغ سه وحيث انه أعطى الفقير الاول
قرشا فالباقي بعد ذلك سه - ١ وحيث انه اعطاه أيضا خمس
الباقي أي سه - ١ فيكون جلة ما أخذه الفقير الاول هو ١ +

$$\frac{\text{سه} - ١}{٤} = \frac{\text{سه} - ١}{٤} \quad (١)$$

وبطرحه من المبلغ الاصلى يكون الباقي هو سه - $\frac{\text{سه} + ٤}{٤}$

وحيث انه أعطى الفقير الثاني أولا قرشين يكون الباقي بعد ذلك هو
 $\frac{\text{سه} - ٤}{٤} - ٢ = \frac{\text{سه} - ١٢}{٤}$ وحيث انه أعطاه أيضا خمس
هذا الباقي أي $\frac{\text{سه} - ١٢}{٢٠}$ فيكون ما أخذه الفقير الثاني هو ٢ +

$$\frac{\text{سه} - ١٢}{٢٠} = \frac{\text{سه} + ٣٦}{٢٠} \quad (٢)$$

وحيث ان الانصبة متساوية يكون نصيب الاول المئين بثمرة (١)
يسارى نصيب الثانى المئين بثمرة (٢) أى

$$\frac{٣٦ + ٤س}{٢٥} = \frac{٤س}{٥}$$

وطولها يحذف المقام بضرب الطرفين فى ٢٥ فينتج

$$٥س + ٢٠ = ٤س + ٣٦$$

$$٥س - ٤س = ٣٦ - ٢٠$$

$$س = ١٦$$

أعنى أن المبلغ $\frac{١٠}{١١}$ ونصيب الاول هو ١ + $\frac{١٥}{١٠} = ٤$ وحيث

ان الانصبة متساوية فيكون عدد الفقراء هو $\frac{١٦}{٤} = ٤$

التحقيق - قد علم أن نصيب الاول $\frac{١٠}{١١}$ فالباقي بعد نصيبه هو

$\frac{١}{١١}$ ونصيب الفقير الثانى هو ٢ + $\frac{١}{١١} = ٤$ والباقي بعد ذلك

$\frac{١}{١١}$ ونصيب الثالث هو ٣ + $\frac{١}{١١} = ٤$ والباقي ٤ هو نصيب

الرابع

مسائل بدرجة أولى ومجهول واحد يطلب حلها

(١٣٦) اقسام $\frac{١٠}{١٥}$ بين شخصين بحيث ان نصف نصيب الاول

يسارى ضعف نصيب الثانى

(١٣٧) اقسام ٧٢ فسدانا بين شخصين بحيث يكون نصيب

أحدهما نصف نصيب الآخر

(١٣٨) اقسام ٢٤٠ جنيا بين ثلاثة أشخاص بحيث يأخذ

الاول ضعف ما يأخذه الثانى وأن يأخذ الثالث ٣ أمثال ما يأخذه

الثانى

(١٣٩) تصدق شخص بمبلغ على اول فقير قابله ثم بمقدار $\frac{3}{4}$ هذا المبلغ على فقير آخر ثم بثاني ما أخذه الثاني على فقير ثالث ثم بنصف ما أخذه الفقير الثالث على فقير رابع فبإيج مقدار ما تصدق به على الفقراء الاربعة ٥ ملهما فما مقدار ما أخذه كل

منهم

(١٤٠) ثلاثة قطع فاش مقدارها ١٠٠ ذراع ولكن الثانية

تزيد عن الاولى $\frac{1}{4}$ ١٥ ذراعا والثالثة تنقص عن الاولى $\frac{1}{4}$ ٥

أذرع فما طول كل قطعة

(١٤١) المطلوب تقسيم ٩٩ نخلة بين خمسة أشخاص بحيث

ان الاول يأخذ زيادة عن الثاني ثلاثة وأقل من الثالث بعشرة

وأزيد من الرابع بتسعة وأقل من الخامس بستة عشر

(١٤٢) أربع قطع من الحرير متساوية في الطول يبيع من كل

من قطعتين منها ١٩ مترا ويبيع من كل من القطعتين الأخرين

١٥ مترا ثم قيس القطع الباقية فوجد أنها ٧٦ مترا فما كان

طول كل قطعة من القطع الاصلية

(١٤٣) زيد باع ٣٩ رأسا من غنمه وعمر وباع ٩٣ رأسا من

غنمه فوجد أن ما بقى عند زيد ضعف ما بقى عند عمرو فن بعد

معرفة أن أغنامهما الاصلية متحدة العدد يراد معرفة مقدار

ما كان عند كل منهما

(١٤٤) اشتغل زيد وعميد في التجارة وكان رأس مال أحدهما

كأمراس مال الآخر في السنة الاولى ربح زيد ٤٠ جنيها وخسب

عبيد ٤٠ جنيتها ولكن في السنة الثانية خسره زيد ثلث ما كان عنده في السنة الاولى وبيع عبيد ضعف ما خسره زيد ناقصا ٤٠ جنيتها فوجد مال عبيد ضعف مال زيد والمطلوب معرفة رأس مال كل منهما

(١٤٥) ملئ آناء ان زيتا وكان سعة أحدهما ثلاثة أمثال سعة الآخر ثم أخذ ٤ أرطال من كل منهما فوجد أن ما بقي في الاناء الكبير يعادل ٤ أمثال ما بقي في الاناء الصغير فما سعة كل منهما

(١٤٦) استأجر جماعة سفينة على حساب ٦٠ فرنكا عن كل شخص ولكن اتفقوا مع الملاح انه اذا زاد عليهم أشخاص آخرون يلزم أن ينقص من مجموع أجرتهم ٣٠ فرنكا في مقابلة كل شخص فاتفق أن نزل بالسفينة أشخاص تزيد عن ربع الاول بمقدار ٣ أشخاص ولهذا دفع كل من الأشخاص الاول خمسين فرنكا فقط والمطلوب معرفة عدد الأشخاص الاول

(١٤٧) يراد شراء ورق طوابع بوسسته بمبلغ ٢١٠ مليمات بحيث يكون جزء منه مما ثمنه ١٠ مليمات وضعف هذا العدد مما ثمنه ٥ مليمات وثلاثة أمثاله مما ثمنه ٣ مليمات وأربعة أمثاله مما ثمنه مليمان وخمسة أمثاله مما ثمنه مليم واحد فكم ورقة تؤخذ من كل نوع

(١٤٨) أب عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٠ سنين فبعد كم سنة

- يصير عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن
 (١٤٩) أب عمره ثمانية أمثال عمر ابنه وفرق العمرين يزيد
 بقدر ١٦ سنة عن ثلاثة أمثال عمر الابن فكم عمر كل منهما
 (١٥٠) ماهو العدد الذي اذا قسم بالتتابع على ٣ ثم على
 ٥ كان مجموع الخارجين ٢٤
 (١٥١) المسافة بين القاهرة والاسكندرية ٢٠٨ كيلومتر
 وقام قطار من الاسكندرية الساعة ٩ افرنكي صباحا بسرعة ٦٠
 كيلومتر في الساعة فبعد أى زمن يتقابل مع القطار الذي يقوم
 من القاهرة الساعة ٨ ١٥ ٦ دقيقة افرنكي صباحا بسرعة ٤٥
 كيلومتر في الساعة
 (١٥٢) قطار سكة حديد يتقطع ٣٦ كيلومتر في الساعة قام
 من محطة الساعة $\frac{1}{4}$ ٣ خلف قطار آخر قام قبله على الشريط
 نفسه وقطع ٨١ كيلومتر في ٣ ساعات والمطلوب تعيين المسافة
 التي بعدها القطار المتأخر يلحق السابق (ثم تحديد الساعة التي
 يلحقه فيها)
 (١٥٣) شخص أوصى أن يقسم ميراثه على أولاده بالكيفية
 الآتية وهي أن يعطى للاول ١٠٠٠ جنيهه وسدس الباقي
 وللثاني ٢٠٠٠ جنيهه وسدس ما يبقى وللثالث ٣٠٠٠ جنيهه
 وسدس ما يبقى وهكذا وتنفيذ هذه الوصية وجد أن الانصبة
 متساوية فكم كان الميراث وكم عدد الاولاد
 (١٥٤) $\frac{3}{4}$ مبلغ مطروحا منه $\frac{1}{3}$ تساوى $\frac{3}{7}$ هذا المبلغ

مضافا اليه $\frac{1}{2}$ فما مقدار هذا المبلغ
 (١٥٥) ثعلب سابق كلبا بقدر ٦٠ قفزة وهو يقفز ٩
 قفزات عند ما يقفز الكلب ٦ قفزات الا أن كل ٣ قفزات من
 قفزات الكلب تعادل ٧ قفزات من قفزات الثعلب والمطلوب
 معرفة عدد القفزات التي يلزم أن يقفزها الكلب حتى يلحق
 الثعلب

حل مجموعة معادلتين بمجهولين ودرجة أولى
 (١١٤) كل معادلة ذات مجهولين يمكن أن يكون لها حلول غير
 معينة

فالمعادلة $٥س + ٢ص = ٣٥$ لها حلول غير معينة لانه اذا
 فرض أن $س$ يساوى مقدارا اختياريا مثل ١ ينتج للمجهول $ص$
 مقدار مطابق له وهو ١٠ واذا فرض أن $س = ٢$ ينتج للمجهول
 $ص$ مقدار مطابق له وهو $\frac{1}{3}$ وهكذا

فاذن لا تكفى معادلة واحدة لتعيين مقدارى مجهولين واذا
 لزم استخراج مقدارى مجهولين فيلزم وجود معادلتين مرتبطتين
 ببعضهما أى أن المقدارين المطلوبين يحققان كلا من المعادلتين
 واجتماع هاتين المعادلتين يسمى بمجموعة معادلتين

(١١٥) تنبيه يلاحظ عند الشروع في حل مجموعة مركبة
 من معادلتين أو أكثر ما تقدم ذكره بنمرة ١٠١ من جهة حذف
 المقامات والاقواس من كل معادلة منها وتحويل الحدود المشتملة على
 المجاهيل الى أحد الطرفين والمشتمة على المعاليم الى الطرف الآخر

(١١٦) حالة خصوصية اذا كانت احدى المعادلتين لا تشمل الا على مجهول واحد يستخرج منها مقداره مباشرة ثم يستبدل هذا المجهول في المعادلة الثانية بالمقدار الناتج فتحصل معادلة تشمل على المجهول الثاني فقط فيمكن استخراج مقداره منها

$$\text{مثلا لحل المجموعة } ٣ \text{ س} - ١٩ = ٥ \quad (١)$$

$$٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ٢٢ \quad (٢)$$

نستخرج مقدار س من المعادلة الاولى فنجد أنه يساوي ٨ ثم نستبدل س في المعادلة (٢) بمقداره وهو ٨ فينتج $١٦ + ٣ \text{ ص} = ٢٢$ وبحل هذه المعادلة ينتج أن $\text{ص} = ٢$

(١١٧) قاعدة عمومية - لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى ومجهولين يحذف أحد المجهولين من هذه المجموعة فننتج معادلة بدرجة أولى ومجهول واحد ومنها يستخرج مقدار هذا المجهول ثم يستبدل في احدى المعادلتين المفروضتين بمقداره فننتج معادلة مشتملة على المجهول الثاني فقط فيستخرج مقداره منها

(١١٨) ولحذف مجهول من مجموعة معادلتين ثلاث طرق -
الاولى طريقة الحذف بالوضع - الثانية طريقة الحذف بالمقارنة -
الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح

وسنتمكلم على حل مجموعة معادلتين بمجهولين بمقتضى قاعدة (١١١) مع استعمال الطرق المذكورة في الحذف فنقول

الحذف بالوضع

(١١٩) قاعدة - يستخرج مقدار أحد المجهولين من احدى

المعادلتين بفرض ان الآخر معلوم ثم يوضع هذا المقدار في المعادلة الثانية

مثلا - ليكن المطلوب حل المجموعة ٥ س + ٣ ص = ٢٩ (١)

٣ س - ٢ ص = ٦ (٢)

فنستخرج مقدار المجهول س من المعادلة الثانية بفرض أن ص معلوم فينتج س = $\frac{٢+٦}{٣}$ ثم يوضع هذا المقدار بدلا عن س في المعادلة الاولى فينتج

$$٢٩ = ٣ ص + \frac{(٢+٦)٥}{٣}$$

وهي معادلة تشتمل على المجهول ص وباستخراج مقداره منها يحدث أن ص = ٣

ثم نستبدل المجهول ص بمقداره وهو ٣ في احدى المعادلتين (١) ٦ (٢) ولتكن الاولى مثلا فينتج

$$٥ س + ٩ = ٢٩ \text{ ومنها } س = ٤$$

فالقداران المطلوبان هما ٤ ٣

الحذف بالمقارنة

(١٢٠) قاعدة - نستخرج مقدار أحد المجهولين من كل من المعادلتين ثم نساوي مقداريهما ببعضهما فنحدث معادلة بمجهول واحد

ليكن المطلوب حل المجموعة ٥ س + ٣ ص = ٢٩ (١)

٣ س - ٢ ص = ٦ (٢)

نستخرج س من معادلة (١) فيحدث س = $\frac{٢٩-٣ص}{٥}$

ثم نستخرج s من معادلة (٢) فيحدث $s = \frac{2+6}{3}$
 وحيث ان هذين المقدارين هما مقدارا المجهول s فيكونان
 متساويين ويحدث

$$\frac{2+6}{3} = \frac{3-29}{0}$$

ويحل هذه المعادلة يوجد أن $s = 3$
 ثم يستبدل المجهول s بالمقدار ٣ في إحدى المعادلتين وليكن
 في معادلة (١) مثلاً فيحدث

$$29 = 9 + 0$$

ويجملها يحدث $s = 4$
 تتبعه - هذه الطريقة تسمى طريقة التساوى

الحذف بالجمع أو الطرح

(١٢١) قاعدة - يلزم اتحاد مكررى المجهول المراد حذفه في
 المعادلتين ولذلك نضرب طرفى الاولى في مكرر هذا المجهول من
 الثانية ونضرب طرفى الثانية في مكرره من الاولى ثم نجمع
 المعادلتين الناتجتين على بعضهما اذا اختلفت علامتا المجهول
 المراد حذفه فيهما أو نطرح احدهما من الاخرى اذا اتحدتا
 العلامتان

فإذا كان المطلوب حل المجموعة

$$(١) \quad 29 = 3s + 0$$

$$(٢) \quad 6 = 2s - 3$$

نحدد مكررى المجهول s بأن نضرب طرفى المعادلة الاولى في ٢

وطرفي الثانية في ٣ فيجث

$$(٣) \quad ١٠ \text{ سه} + ٦ \text{ صه} = ٥٨$$

$$(٤) \quad ٩ \text{ سه} - ٦ \text{ صه} = ١٨$$

ثم نجمع المعادلتين ٣ و ٤ على بعضهما لاختلاف علامتي صه
فيهما فيجث

$$(٥) \quad ١٩ \text{ سه} = ٧٦$$

ويجث هذه المعادلة يوجد أن سه = ٤

ثم اذا عوض المجهول سه بمقداره وهو ٤ في معادلة (١) ينتج

$$(٦) \quad ٢٩ \text{ صه} = ٣ + ٢٠$$

ويجث هذه المعادلة يوجد أن صه = ٣

ويمكن أن نتخذ مكرري المجهول سه بأن نضرب طرفي المعادلة

(١) في ٣ وطرفي المعادلة (٢) في ٥ فيجث

$$(٦) \quad ١٥ \text{ سه} + ٩ \text{ صه} = ٨٧$$

$$(٧) \quad ١٥ \text{ سه} - ١٠ \text{ صه} = ٣٠$$

ثم نطرح المعادلة (٧) من (٦) لانتجاد علامتي سه فيهما فيجث

$$١٩ \text{ صه} = ٥٧ \text{ أو}$$

$$\text{صه} = ٣$$

ثم اذا عوض المجهول صه بمقداره وهو ٣ في معادلة (١) ينتج

$$٥ \text{ سه} - ٩ = ٢٩ \text{ أو}$$

$$\text{سه} = ٤$$

(١٢٢) تنبيه اذا شوهذ ان بين مكرري المجهول المراد حذفه

عوامل مشتركة نبحث عن المضاعف البسيط لمكررى هذا المجهول
ثم تضرب طرفى المعادلة الاولى فى خارج قسمة المضاعف البسيط
على مكرر هذا المجهول من الاولى وتضرب طرفى المعادلة الثانية
فى خارج قسمة المضاعف البسيط على مكرر المجهول المذكور
من الثانية

مثلا - ليكن المطلوب حل المجموعة

$$(١) \quad ٥س + ٤ص = ٣٢$$

$$(٢) \quad ٣س + ٦ص = ٣٠$$

بواسطة حذف المجهول صه بطريقة الجمع أو الطرح يقال
حيث ان مكررى المجهول صه وهما ٤ و ٦ بينهما عامل مشترك
فنبحث عن المضاعف البسيط لهما يوجد ١٢ ثم تضرب طرفى
المعادلة الاولى فى خارج قسمة ١٢ على ٤ أى فى ٣ وتضرب
طرفى المعادلة الثانية فى خارج قسمة ١٢ على ٦ أى ٢ فينتج

$$(٣) \quad ١٥س + ١٢ص = ٩٦$$

$$(٤) \quad ٦س + ١٢ص = ٦٠$$

ثم نطرح معادلة (٤) من معادلة (٣) ينتج

$$٩س = ٣٦ \quad \text{ومنها}$$

$$س = ٤$$

ثم اذا عوض المجهول سه بمقداره وهو ٤ فى احدى المعادلتين

$$(١) \quad ٥س + ٤ص = ٣٢$$

$$٢٠ + ٤ص = ٣٢$$

ويحلها يحدث صه = ٣

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

$$\left. \begin{array}{l} ١٨ = صه + ٢مه \\ ١٥ = صه + ٢مه \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٥٧) \quad ٨ = صه + مه \\ ٢ = صه - مه \end{array} \quad (١٥٦)$$

$$\left. \begin{array}{l} ١٤ = صه + ٢مه \\ ١٢ = صه - ٨مه \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٥٩) \quad ٧ = صه - ٢مه \\ ٤ = صه - ٢مه \end{array} \quad (١٥٨)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٣٩ = صه - ٢مه \\ ٤٧ = صه + ٩مه \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٦١) \quad ٦ = صه - ١٢مه \\ ٢٠ = صه - ١٦مه \end{array} \quad (١٦٠)$$

$$\left. \begin{array}{l} ١٣ = صه - ٢مه \\ ٩٤ = صه + ٥مه \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٦٣) \quad ٦ = صه - ٧مه \\ ٥١ = صه + ٢مه \end{array} \quad (١٦٢)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٦ = (صه - مه)٣ \\ ١٧ = صه - ٤مه \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٦٥) \quad صه = ٢مه \\ ٢ = صه + مه \end{array} \quad (١٦٤)$$

$$\left. \begin{array}{l} ١٧ = \frac{صه}{٥} + \frac{مه}{٤} \\ ١٩ = \frac{صه}{٤} + \frac{مه}{٥} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (١٦٧) \quad ١٨,٥ = \frac{صه}{٣} + \frac{مه}{٢} \\ ٢ = \frac{صه}{٢} - \frac{مه}{٣} \end{array} \quad (١٦٦)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{13}{10} = \frac{4}{ص} - \frac{5}{س} \\ \frac{11}{3} = \frac{5}{ص} - \frac{8}{س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (168) \quad (169) \quad 0 + ص = (2 - س) \quad 0 \\ (170) \quad 3 = ص + س \quad 0 = ص - 5 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{7}{ص} + \frac{5}{س} \\ 1 = \frac{13}{س} + \frac{5}{ص} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (171) \quad 0 = \frac{1}{ص} + \frac{1}{س} \\ (172) \quad 2 = \frac{ص}{3} + \frac{س}{2} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 = \frac{ص}{3} + \frac{س}{2} \\ 6 = \frac{ص}{2} + \frac{س}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (173) \quad 1 = ص + س \\ (174) \quad 6 = ص - س \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-ص}{3} = \frac{س}{2} \\ \frac{2}{3} = \frac{س}{ص} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (175) \quad 7 = \frac{ص}{2} + \frac{1}{س} \\ (176) \quad 6 = \frac{ص}{2} - \frac{1}{س} \end{array}$$

مسائل محلولة بدرجة أولى ومجهولين

(١٢٣) المسئلة الاولى عقار وأطيان تبلغ قيمتهما ١٢٠٠٠ جنيه وإيرادهما

السوى ١٢٠٠٠ جنيه والعقار يربح باعتبار ١٠ ٪ من قيمته والأطيان

تربح باعتبار ٨ ٪ فما قيمة العقار وما قيمة الأطيان

الحل - نرمز لقيمة العقار بحرف س وقيمة الأطيان بحرف ص

وهو وحيث ان قيمتهما ١٢٠٠٠ فنبعدن المعادلة

$$س + ص = 12000 \quad (1)$$

وحيث ان ربح مبلغ s في السنة بسعر 10% هو $\frac{10s}{100}$ و ربح
مبلغ v في السنة بسعر 8% هو $\frac{8v}{100}$ وان مجموع الربحين
هو جنبه فتحدث المعادلة

$$(2) \quad 1100 = \frac{10s}{100} + \frac{8v}{100}$$

وبحل المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن $s = \frac{1000}{7}$ و جنبه
جنبه أعني أن قيمة العقار جنبه وقيمة الاطيان جنبه
تنبيهه - ويمكن حل هذه المسئلة بمعادلة واحدة

(١٢٤) المسئلة الثانية - عدد مركب من رقبن مجموعهما
عشرة واذا عكس هذا العدد يحدث عدد آخر يساوى أربعة
أمثال الاول زائدا خمسة عشر

الحل - يرمز لرقم الآحاد بحرف s و لرقم العشرات بحرف
 v فيكون العدد المطلوب هو $s + 10v$ وحيث ان
مجموع رقمي العدد هو ١٠ فتحدث المعادلة

$$(1) \quad 10 = s + v$$

واذا عكس هذا العدد ينتج عدد آخر وهو $s + 10v$
وحيث انه يؤخذ من منطوق المسئلة أن هذا العدد الاخير
يساوى أربعة أمثال الاول زائدا ١٥ تحدث المعادلة

$$(2) \quad s + 10v = 4(s + 10v) + 15$$

وبحل المجموعة المركبة من معادلتى (١) و (٢) ينتج أن $s = 6$
 $v = 4$ وحيث أن العدد المطلوب هو ١٠

(١٢٥) المسئلة الثالثة شخص استلم ٢٠ قطعة من نوع من

العملة المصرية و ٤ قطع من نوع آخر منها فبلغ قيمة ما استلمه
 ٦ قطع من النوع الاول وثلاث قطع من النوع
 الثانى فبلغت القيمة ٣٧ فما قيمة القطعة من كل نوع بالقرش
 الحل - يرمز لقيمة القطعة من النوع الاول بحرف سـ ولقيمة
 القطعة من النوع الثانى بحرف صـ فعلى حسب المنطوق يكون
 قيمة ما استلمه أولا هو ٢٠ سـ + ٤ صـ وحيث انه مساو ٣٧
 فتحدث المعادلة ٢٠ سـ + ٤ صـ = ٦٠ (١)
 ويكون قيمة ما استلمه ثانيا ٦ سـ + ٣ صـ وحيث انه يساوى
 ٣٧ فتحدث المعادلة

$$٦ سـ + ٣ صـ = ٢٧ (٢)$$

وبحل مجموعة المعادلتين (١) ٦ (٢) ينتج أن

$$سـ = ٢ \quad ٦ صـ = ٥$$

أعنى أن قطع النوع الاول من ذات القرشين وقطع النوع الثانى
 من ذات الخمسة قروش

(١٣٦) المسئلة الرابعة - ما هو الكسر الذى اذا أضيف
 لكل من حديه واحد ينتج نصف واذا طرح من كل من حديه
 واحد ينتج خمس

الحل - نفرض أن هذا الكسر هو $\frac{سـ}{صـ}$ وحيث انه اذا
 أضيف لحديه واحد ينتج $\frac{١}{٢}$ فتحدث المعادلة

$$\frac{سـ+١}{١+صـ} = \frac{١}{٢} (١)$$

وحيث انه اذا طرح من حديه واحد ينتج $\frac{١}{٥}$ فتحدث المعادلة

$$\frac{٢}{٥} = \frac{١-ص}{١-ص}$$

وبحل مجموعة المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن

$$ص = ٥ و صه = ١١ ويكون الكسر \frac{٥}{١١}$$

مسائل بدرجة أولى ومجهولين يطلب حلها

(١٧٦) المطلوب إيجاد عددين مجموعهما ٢٣٥ والفرق بينهما ٦١

(١٧٧) عددان ضعف الاول منهما مضافا اليه الثاني يساوي

٤٨ وضعف الثاني مضافا اليه الاول يساوي ٥١ فاهما العددان

(١٧٨) تاجر باع ٧٥ اردبا من القمح و ٤٢ اردبا من

الشعير يبلغ جنيه مصري ثم باع بالسعر عينه ٥٠ اردبا من

القمح و ٦٠ اردبا من الشعير يبلغ ٨٨ جنيهها مصريا فما ثمن

الاردب من كل نوع

(١٧٩) شخص وضع جزءا من ماله في بنك ليربح بسعر ٥ %

وباقيه في بنك آخر ليربح بسعر ٤ % فنتج من المبلغين ربح قدره

٧٠ جنيا في السنة ولوعكس بان وضع مافي البنك الثاني في

الاول وما في الاول في الثاني يزيد الارباح ٤ جنيهات في السنة

فما هما المبلغان

(١٨٠) أب عمره ثلاثة أمثال عمر ابنه وقيل ١٢ سنة كان

عمر الاب ستة أمثال عمر الابن فما عمر كل منهما

(١٨١) ما هو الكسر الذي اذا أضيف الى بسطه ٣ وطرح

من مقامه ٤ كان الناتج مساويا للواحد واذا طرح من بسطه

٣ وأضيف لمقامه ٤ كان الناتج مساويا ٣.

(١٨٢) نوعان من القمح اذا خلط ٥ أراب من الاول مع ٣ أراب من الثاني يكون ثمن الارب من المخلوط ٦ واذا خلط ٣ أراب من الاول وارب من الثاني يكون ثمن الارب من المخلوط ٦ فما ثمن الارب من كل نوع

(١٨٣) فلاح له فدان عشورى وثلاثة فدادين خراجية ويدفع عنها أموالا أميرية قدرها خمسة حنيئات مصرية في السنة ويشدّل الضرائب ببلده زيدت الاطيان العشورية ٥٠٪ ونقصت الاطيان الخراجية ١٥٪ وبذلك صار يدفع ٤٨٪ في السنة فما مقدار ما كان يدفعه أولا عن كل فدان من العشورى والخراجى

(١٨٤) عدد مركب من رقين وهو مساو ثلاثة أمثال مجموع رقيه ولو أضيف لذلك العدد ٥ لصار بقدر معكوسه فما هذا العدد

(١٨٥) قال شخص لآخر اذا بعث لى ٤ فدادين من أطيانك يصير ما عندى ضعف ما عندك فقال له الآخر نعم ولكن اذا بعث لى أنت ٤ فدادين من أطيانك يصير ما عندى قدر ما يبقى عندك فكم عند كل منهما من الفدادين

(١٨٦) رجل وزوجته يلزمهما وبية دقيق في كل ١٥ يوما وبعد أن كلا منهما معا ستة أيام سافر الرجل وأكلت المرأة وحدها الباقي في ٣ يوما والمطلوب معرفة عدد الايام التى يأكل فيها كل منهما وحده البية

(١٨٧) كبس يسع ١٩ قطعة من ذات العشرة قروش و ٦ قطع من ذات القرشين ولكن ٤ قطع من ذات العشرة قروش وخمس قطع من ذات القرشين تشغل $\frac{١٧}{٣٣}$ منه والمطلوب معرفة مقدار ما يسع من كل نوع منهما على حدته

(١٨٨) مخزن يسع ١٣ زكبة دقيق و ٣٣ برميل خل فوضع فيه ٥ زكائب دقيق و ٩ براميل خل فشغلت ثلث المخزن والمطلوب معرفة ما يسعه هذا المخزن من كل واحد من النوعين على حدته

(١٨٩) تاجر اشترى ٥٧٠ برتقاله بعضها بسعر كل ١٢ بقرش والبعض بسعر كل ١٨ بقرش وباع الجميع بسعر ١٥ بقرش وبذلك ربح ٣ قروش فما نحن ما اشتراه من كل نوع

(١٩٠) المطلوب تقسيم ١٣٥ فدانا بين ثلاثة أشخاص بحيث تكون نسبة نصيب الاول الى نصيب الثاني كنسبة $\frac{٤}{٥}$ ونسبة نصيب الثاني الى نصيب الثالث كنسبة $\frac{٥}{٦}$

حل مجموعة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ذات درجة أولى

(١٣٧) قاعدة - لحل مجموعة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل ذات درجة أولى فنحذف أحد هذه المجاهيل من إحدى المعادلات المفروضة مع كل من المعادلتين الأخرتين على التوالي فنحصل مجموعة معادلتين بمجهولين نجري حلها كما تقدم وبعد معرفة

مقدارى هذين المجهولين نستعيضهما بمقداريهما في احدى
المعادلات المحتوية على الثلاثة مجاهيل فنحصل معادلة ذات
مجهول واحد يمكن ايجاد مقداره
مثال ذلك ليكن المطلوب حل المجموعة

$$(١) \quad ٥س + ٤ص - ٢ع = ٧$$

$$(٢) \quad ٣س - ٢ص + ٣ع = ٨$$

$$(٣) \quad ٧س + ٣ص - ٤ع = ١$$

فنحذف المجهول ع من معادلتى (١) و (٢) وليكن بطريقة
الجمع والطرح فنحصل المعادلة

$$(٤) \quad ٢١س + ٨ص = ٣٧$$

ثم نحذف المجهول ع من معادلتى (٢) و (٣) بالطريقة المذكورة

$$\text{فنحصل المعادلة} \quad ٣٣س + ص = ٣٥ \quad (٥)$$

ثم نكون من المعادلتين (٤) و (٥) مجموعة ونحلها كما تقدم

فنجد أن $س = ١$ و $ص = ٦$ ثم نعوض $س = ٦$ و $ص = ١$

بمقداريهما في احدى المعادلات المشتملة على الثلاثة مجاهيل

وليكن في معادلة (١) فنحصل $١٣ - ٢ع = ٧$ ومنها ع

$= ٣$ وحينئذ تكون المقادير ١، ٢، ٣ هي مقادير المجاهيل

س، ص، ع على التوالى في المجموعة المفروضة

(١٢٨) تنبيه يقاس على ما ذكر حل مجموعة أربعة معادلات

ذات أربعة مجاهيل وحل مجموعة خمسة معادلات ذات خمسة

مجاهيل وهلم جرا

وسنذكر قاعدة عامة لحل مجموعة جملة معادلات بجملة مجاهيل
فنفقول

حل مجموعة معادلات ذات جملة مجاهيل

(١٣٩) قاعدة عمومية لحل مجموعة معادلات عددها m ذات مجاهيل عددها n يحذف أحد هذه المجاهيل من إحدى هذه المعادلات مع كل واحدة من المعادلات الأخرى التي عددها $m - 1$ على التوالي فتحدث مجموعة مركبة من معادلات عددها $m - 1$ مشتملة على مجاهيل بقدرها

n ثم يحذف أحد هذه المجاهيل من إحدى المعادلات التي عددها $m - 1$ مع كل واحدة من المعادلات الأخرى التي عددها $m - 2$ على التوالي فتحدث مجموعة مركبة من معادلات عددها $m - 2$ مشتملة على مجاهيل بقدرها

وبالاستمرار على ذلك نتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فيمكن حلها ثم يوضع مقدار هذا المجهول في إحدى معادلات المجموعة المشتملة على مجهولين فتحدث معادلة مشتملة على المجهول الثاني فيمكن استخراج مقداره

ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين في إحدى معادلات المجموعة المشتملة على ثلاثة مجاهيل فتحدث معادلة مشتملة على المجهول الثالث فيمكن إيجاد مقداره

وبالاستمرار على هذه الكيفية نتوصل الى إيجاد مقادير جميع

بجاءيل المجموعة المفروضة على التوالى مثلا لحل المجموعة

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & \text{س} + \text{ص} - \text{ع} - \text{ط} + \text{و} = ٦ \\ (2) \quad & ٣\text{س} - ٢\text{ص} + ٤\text{ع} - ٢\text{ط} - \text{و} = ١٧ \\ (3) \quad & ٢\text{س} + ٤\text{ص} + ٥\text{ع} - \text{ط} + ٣\text{و} = ٤٢ \\ (4) \quad & \text{س} - ٣\text{ص} + ٤\text{ع} + \text{ط} - ٢\text{و} = ١٣ \\ (5) \quad & ٤\text{س} + ٦\text{ص} - ٢\text{ع} + ٥\text{ط} - ٣\text{و} = ٥٧ \end{aligned} \right\} \text{أ}$$

نحذف المجهول و من المعادلة (١) مع كل من المعادلات ٢، ٣، ٤، ٥ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من أربع معادلات نرمز لها بحرف ب وهى

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & ٤\text{س} - \text{ص} + ٣\text{ع} - ٣\text{ط} = ١١ \\ (2) \quad & -\text{س} + \text{ص} + ٨\text{ع} + ٢\text{ط} = ٢٤ \\ (3) \quad & ٣\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع} - \text{ط} = ١ \\ (4) \quad & ٧\text{س} + ٩\text{ص} - ٥\text{ع} + ٢\text{ط} = ٧٥ \end{aligned} \right\} \text{ب}$$

ثم نحذف المجهول ط من معادلة (١) فى مجموعة ب مع كل من المعادلات ٢، ٣، ٤ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من ثلاث معادلات نرمز لها بحرف ج وهى

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & ٥\text{س} + \text{ص} + ٣٠\text{ع} = ٥٠ \\ (2) \quad & -٥\text{س} + ٢\text{ص} - ٣\text{ع} = ٨ \\ (3) \quad & ٢٩\text{س} + ٢٥\text{ص} - ٩\text{ع} = ٢٠٣ \end{aligned} \right\} \text{ج}$$

ثم نحذف المجهول ع من معادلة (٢) من مجموعة ج مع كل من معادلتى ١، ٣ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من معادلتين يعبروا بهن نرمز لهما بحرف د وهى

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 30 - = 21 + 9 \\ (2) \quad 227 = 19 + 208 \end{array} \right\} 5$$

ثم نحذف المجهول من هذه المجموعة فتحدث معادلة ذات
مجهول واحد وهي $1779 = 5337$ وبحلها يحدث

$$3 = 3$$

وبوضع مقدار 3 في إحدى معادلتى مجموعته 3 وليكن في الاولى
وحل المعادلة الناتجة نجد أن $5 = 5$

وبوضع مقدار 3 في إحدى معادلات مجموعته 3 وليكن
في الاولى وحل المعادلة الناتجة نجد أن $1 = 1$

وبوضع مقادير 3 و 6 في إحدى معادلات مجموعته 3
وليكن في الثالثة وحل المعادلة الناتجة نجد أن $7 = 7$

وبوضع مقادير 3 و 6 و 6 في إحدى معادلات
مجموعته 3 وليكن في الاولى وحل المعادلة الناتجة نجد أن $7 = 7$

فتكون المقادير $3, 5, 1, 7, 6$ هي المقابلة للمجهول 3 و 6
و 6 و 7 و 1 على التوالي

(١٣٠) قد فرضنا فيما تقدم في حل مجموعة معادلات أن كل
معادلة تشمل على جميع مجاهيل المجموعة فإذا لم تشمل **كل**

معادلة على جميع المجاهيل المفروضة تسمى المجموعة ذات
معادلات غير تامة وحلها كحل المجموعة ذات المعادلات التامة غير

أنه مما ينبغي التنبيه له أن يبدأ بحذف المجهول الداخل أقل
عددا من غيره في معادلات المجموعة

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 10 = ع ٢ - ص ٢ + س ٢ \\ (2) \quad 12 = \quad \quad \quad ع ٣ - س ٥ \\ (3) \quad 19 = \quad \quad \quad ص ٢ + س ٣ \\ (4) \quad 9 = ص ٢ + ع ٢ - س ٣ \end{array} \right\} \text{مثلا حل المجموعة ١}$$

يشاهد أن المجهول $ص$ داخل فيها بعدد أقل من غيره فيبتدأ بحذفه من المعادلتين ٣ و ٤ فتحدث معادلة مجردة منه فإذا ضمت هذه المعادلة إلى المعادلتين ١ و ٢ تحدث مجموعة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهيل نرمز لها بحرف $ب$ وهي

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 10 = ع ٢ - ص ٢ + س ٢ \\ (2) \quad 12 = \quad \quad \quad ع ٣ - س ٥ \\ (3) \quad 11 = ع ٦ - ص ١٦ - س ٩ \end{array} \right\} ب$$

وبحيث أن المجهول $ص$ داخل في هذه المعادلات بعدد أقل من غيره يحذف من معادلتى ١ و ٣ فتحدث منهما معادلة مشتملة على المجهولين $س$ و $ع$ وبإضافتها للمعادلة (٢) تحدث مجموعة مركبة من معادلتين بمجهولين فإذا رمز لها بحرف $ج$ يحدث

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 12 = ع ٣ - س ٥ \\ (2) \quad 127 = ع ٥٠ - س ٥٩ \end{array} \right\} ج$$

وإذا حذف المجهول $ع$ من هذه المجموعة تحدث المعادلة

$$٧٣ = س ٢١٩ \text{ ومنها } س = ٣$$

وبوضع مقدار $س$ في إحدى معادلتى مجموعة $ج$ يمكن أن يستخرج مقدار $ع$ ويرى أنه يساوى ١ ويتعويض $س = ١$ و $ع =$

بمقداريهما في احدى معادلات مجموعة ب (التي تكون مشتملة على المجهول ص) ينتج أن ص = ٢ ثم بوضع مقادير ص ٦ و ٤ ص في احدى معادلات مجموعة ا (التي تكون مشتملة على ص) ينتج مقداره ويوجد أنه يساوى ٥

(١٣١) اذا وجدت مجاهيل مجموعة داخلية في المقامات كما في المجموعة

$$(١) \quad ١٢,٥ = \frac{٢}{ص} + \frac{٥}{ص}$$

$$(٢) \quad ٣,٤ = \frac{٢}{ص} - \frac{٤}{ص}$$

فلاسهل في الحل أن يؤخذ مجاهيل مساعده فنفرض أن ص = $\frac{١}{ص}$ و ص = $\frac{١}{ص}$ فتؤول المجموعة الى هذه الصورة

$$(١) \quad ١٢,٥ = ٢ ص + ٥ ص$$

$$(٢) \quad ٣,٤ = ٢ ص - ٤ ص$$

وبحمل هذه المجموعة يوجد أن ص = ١,٦ و ص = ١,٥ ومن ذلك يمكن استخراج مقدارى ص ٦ ص بأن يقال حيث
فرض أن ص = $\frac{١}{ص}$ فيكون ص = ١ : ١,٦ = ٠,٦٢٥
أى $\frac{٥}{ص}$ وحيث فرض أن ص = $\frac{١}{ص}$ فيكون ص = ١ : ١,٥ = $\frac{٢}{ص}$

ويمكن البطل بكيفية أخرى وهي أن يحذف أحد المجهولين ص ولذلك نقعد البسطين ٣ و ٦ بأن نضرب طرفي المعادلة (١) في ٢ وطرفي المعادلة (٢) في ٣ فيحدث

$$(١) \quad ٢٥ = \frac{٦}{ص} + \frac{١}{س}$$

$$(٢) \quad ١٠,٢ = \frac{٦}{ص} - \frac{١٢}{س}$$

و يجمع هاتين المعادلتين يوجد $\frac{٢٢}{س} = ٣٥,٢$ ومن هذه المعادلة
ينتج أن $س = \frac{٢٢}{٣٥,٢} = ٠,٦٢٥ = \frac{٥}{٨}$ ثم نضع مقدار $س$ في
احدى المعادلتين الاصليتين وليكن في الاولى فيحدث $\frac{٥}{١٢٥}$
+ $\frac{٢}{ص} = ١٢,٥$ ويحلها يحدث $ص = \frac{٢}{٣}$

(١٣٢) تنبيه - اذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد
المجاهيل تكون المجموعة ممكنة الحل كما شوهد في المجموعات
السابقة غير أنه يشترط أن لا يكون بين معادلات المجموعة الواحدة
تخالف في مقادير المجاهيل ولا أن يكون بعض المعادلات
متداخلا في بعض فان ذلك يؤدى الى عدم امكان الحل

واذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل يؤخذ منها
معادلات بقدر عدد المجاهيل وتحل تلك المعادلات فاذا وضعت
مقادير المجاهيل التى تنتج منها فى المعادلات الباقية وتطابقت كانت
المجموعة ممكنة الحل وتكون المعادلات الباقية لا فائدة فيها واذا
لم تتطابق فالمجموعة تكون غير ممكنة الحل

أما اذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل تكون المجموعة
غير معينة الحل

مثلا اذا فرضت مجموعة ذات معادلتين ومحتوية على ثلاثة مجاهيل
وحذف أحد هذه المجاهيل فبقى معادلة بمجهولين وقد تقدم بكرة

١١٤ ان كل معادلة بمجهولين لها مقادير غير معينة فاذا أخذ أى مقدارين من هذه المقادير ووضعنا بدل المجهولين في احدى المعادلات الاصلية وجد للجهدول الثالث مقدار مطابق لذينك المقدارين ثم اذا أخذ مقداران آخران وأجرى العمل كما ذكر يفتج للجهدول الثالث مقدار آخر وعلى هذه تكون المجموعة غير معينة الحل

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

$$(191) \quad 3 = 2x - 4y + 5z$$

$$21 = 12x + 8y - 3z$$

$$13 = 3x + 5y + 2z$$

$$(192) \quad 17 = 4x + 5y + 2z$$

$$2 = x - 2y + 3z$$

$$-2 = 2x - 3y + 5z$$

$$(193) \quad 23 = 2x - 3y + 5z$$

$$55 = 4x + 5y - 3z$$

$$73 = 5x + 7y + 2z$$

$$(194) \quad 1 = x - 3y - 2z$$

$$13 = 2x - 2y + 3z$$

$$11 = 2x - 4y + 5z$$

$$١٠ = ص + س \quad (١٩٥)$$

$$١٩ = ع + س$$

$$٢٣ = ع + ص$$

$$١٤ = ص ٢ + س ٥ \quad (١٩٦)$$

$$١٥ = ع ٦ - ص$$

$$٠ = ع + ص ٢ + س$$

$$١٤ = ط + ع ٣ + ص + س \quad (١٩٧)$$

$$٢٥ = ط + ع + ص ٢ + س ٤$$

$$١٦ = ط - ع ٣ + ص + س ٢$$

$$٧ = ط + ع - ص ٤ - س ٥$$

$$٨ = ط ٢ + ع - ص + س \quad (١٩٨)$$

$$٩ = ط + ع ٢ + ص - س$$

$$٢ = ط - ع + ص ٢ + س -$$

$$١١ = ط + ع + ص + س ٢$$

$$١٨ = ع ٣ + ط ٢ + ص + س \quad (١٩٩)$$

$$١٧ = ع + ط + ص ٢ + س$$

$$٩ = ع ٤ - ط ٣ + ص$$

$$٢ = ع - ط$$

$$١٨ = ص ٥ - ط ٢ + ع ٣ \quad (٢٠٠)$$

$$٩ = ص ٤ - ط + س ٣$$

$$١٣ = ط ٦ - ص ٧ + س$$

$$١٥ = ط ٢ + ص ٨ - س ٢ - ع ٥$$

$$١٣ = ٧٢ + ط + ع٢ - صه + سه٣ \quad (٢٠١)$$

$$٨ = ٧ - ط٢ - ع٢ + صه٣ - سه٢$$

$$٣٩ = ٧٣ + ط٢ + ع + صه٢ + سه٥$$

$$٣١ = ٧ + ط٥ + ع٤ + صه٥ - سه٤$$

$$١ = ٧ + ط + ع - صه + سه$$

$$٢١ = ط + ع - صه٢ + سه٢ \quad (٢٠٢)$$

$$٣ = ٧ + ط٤ - ع٢ + صه$$

$$١٢ = ٧ - ط٢ + صه٢ - سه٣$$

$$١٤ = ٧٣ + ع٥ - صه٤ + سه٢$$

$$٢٤ = ٧٢ - ط٥ + ع٢ + سه٢$$

$$٨ = سه + صه \quad (٢٠٤) \quad ٨ = سه + صه \quad (٢٠٣)$$

$$١١ = ط + سه \quad ٧ = ط + صه$$

$$٦ = و + سه \quad ٢ = و٢ - ط$$

$$١٢ = ٧ + سه \quad ٣ = ع + و$$

$$٩ = ع + ٧ \quad ٩ = ٧ + ع$$

$$٤ = و٢ - ط \quad ٢ = سه - و$$

مسائل محلولة بجملة مجاهيل بدرجة أولى

(١٣٣) المسئلة الاولى عائلة تصرف في الشهر بجم في ثمن بن

وسكرو صابون أخذت في أول شهر ٩ أرطال من البن و ٢٨ رطلا

من السكر و ١٨ رطلا من الصابون وأخذت في ثاني شهر ١٠

أرطال من البن و ٢٠ رطلا من السكر و ٢٠ رطلا من الصابون
وفي ثالث شهر أخذت ١١ رطلا من البن و ٢١ رطلا من
السكر و ١٦ رطلا من الصابون فماتن الرطل من كل نوع
الحل نرمز لثن الرطل من البن بحرف سـ ولثن الرطل من
السكر بحرف صـ ولثن الرطل من الصابون بحرف عـ فعلى
حسب منطق المسئلة تحدث المجموعة الآتية

$$٩ سـ + ٢٨ صـ + ١٨ عـ = ١٠٠$$

$$١٠ سـ + ٢٠ صـ + ٢٠ عـ = ١٠٠$$

$$١١ سـ + ٢١ صـ + ١٦ عـ = ١٠٠$$

وبحل هذه المجموعة نجد أن سـ = ٦٥ صـ = ١٦ عـ = ٦
= ١٥ أعني أن ثن الرطل من البن خمسة قروش ومن
السكر قرش ومن الصابون قرش ونصف

(١٣٤) المسئلة الثانية - سمار عنده عربة وحصان
وعجلة وجمار معرضة للبيع ثمن العربة والحصان ٩٠ جنيها وثمن
العربة والعجلة ٦٨ جنيها وثمن العربة والجمار ٦٠ جنيها وثمن
العجلة والحصان ٥٨ جنيها فماتن كل منها على حدة
الحل نرمز لثن العربة بحرف سـ ولثن الحصان بحرف صـ
ولثن العجلة بحرف عـ ولثن الجمار بحرف جـ فعلى حسب
منطق المسئلة تحدث المجموعة الآتية

$$(١) سـ + صـ = ٩٠$$

$$(٢) سـ + عـ = ٦٨$$

$$(٣) سـ + جـ = ٦٠$$

$$(٤) عـ + صـ = ٥٨$$

وبجل هذه المجموعة نرى أن ثمن العسربة ٥٠ جنيا وثن
الحصان ٤٠ جنيا وثن الجيلة ١٨ جنيا وثن الجار ١٠
جنيات

(١٣٥) كلف مهندس بعمل مساحة قطعة أرض فقسها الى
ثلاث مثلثات متساوية ومستطيلين متساويين وثمان مربعات
متساوية وشبهى منحرف متساويين ومعين ووجد أن مساحتها
ثلاثة أفدنة وقال ان مساحة مثلث ومستطيل ومربع وشبهى
المنحرف تعادل نصف القطعة وان مساحة المستطيل وشبه
منحرف والمعين تعادل نصف القطعة أيضا وان مساحة الثمان
مربعات وشبهى المنحرف تعادل نصف القطعة كذلك وأما
مساحة مستطيل ومربع ومعين فتعادل ربع القطعة فقط فها
مساحة كل شكل على حدته مقدرا بالقصة المربعة

الحل نرسم مساحة المثلث بحرف مـ ومساحة المستطيل بحرف
صـ ومساحة المربع بحرف عـ ومساحة شبه المنحرف بحرف
طـ ومساحة المعين بحرف نـ فبناء على منطوق المسئلة نحذ
المجموعة الآتية

$$٣٣ + ٢ + ص + ٨ + ع + ٢ + ط + ن = ١٠٠٠ \text{ قصة}$$

$$» ٥٠٠ = ٢ + ص + ع + ط$$

$$» ٥٠٠ = ٢ + ص + ط + ن$$

$$» ٥٠٠ = ٢ + ٨ + ع + ط$$

$$» ٢٥٠ = ٢ + ص + ع + ن$$

وبجل هذه المجموعة يوجد أن مساحة كل مثلث تساوى ٥٠
 قسبة ومساحة كل مستطيل تساوى ١٢٥ قسبة ومساحة كل
 مربع تساوى ٢٥ قسبة ومساحة كل شبه منحرف = ١٥٠
 قسبة ومساحة المعين ١٠٠ قسبة

مسائل بجملة مجاهيل ودرجة أولى يطلب حلها
 (٢٠٥) المطاوب ايجاد ثلاثة أعداد يكون مجموع الاول والثاني
 ٢٧ ومجموع الثانى والثالث ٣٣ ومجموع الاول والثالث ٣٠
 (٢٠٦) اقسام ٢٢٠ فدانا بين ثلاثة أشخاص بحيث ان الثانى
 يأخذ زيادة عن ثلثى نصيب الاول بقدر ١٦ فدانا والثالث يأخذ
 أقل من $\frac{3}{4}$ الثانى بقدر ٣ أفدنة

(٢٠٧) ثلاثة من الخيل وعربية معرضة للبيع فلما ثمن
 العربية فهو ٤٤ جنهما مصريا واذا بيعت مع الحصان الاول
 تكون قيمتهما قدر ثمن الحصانين الثانى والثالث واذا بيعت العربية
 مع الحصان الثانى كان ثمنهما قدر ضعف ثمن الحصانين الاول
 والثالث معا وأما اذا بيعت مع الحصان الثالث كان ثمنهما بقدر
 ٣ أمثال ثمن الحصانين الاول والثانى فما ثمن كل حصان على
 حدة

(٢٠٨) ثلاثة سبائك من الذهب وزنها ٥ مثاقيل وعيارها
 على التعاقب ٩٢٠ ٦ ٨٥٠ ٦ ٨٠٠ واذا سبكت
 الاولى مع الثانية ينتج سبيكة عيارها ٩٠٠ واذا سبكت

الثانية مع الثالثة ينتج سبيكة عيارها ٨٢٠. فما وزن كل سبيكة على حدتها

(٢٠٩) زيد وعمرو وبكر مع كل واحد منهم مبلغ فأعطى زيد لكل من عمرو وبكر مقدارا بقدر ما معه ثم اقتدى به عمرو فأعطى كلا من زيد وبكر مقدارا بقدر ما معه (بعد قسمة زيد) ثم إن بكرا أعطى أيضا لكل من زيد وعمرو مقدارا بقدر ما معه وبذلك وجد أن كلا منهم معه $\frac{1}{3}$ فما مقدار ما كان مع كل واحد منهم أولا (٢١٠) حوض مسطو عليه أربع حنفيات الاولى والثانية عيلاته في ٣ ساعات والثانية والثالثة عيلاته في أربع ساعات والثالثة والرابعة في ٥ ساعات والاولى والثالثة في ٤ ساعة فما مقدار الزمن الذي تملأ فيه كل منها ذلك الحوض

(٢١١) صراف يحجز خمسة مليمات في مقابلة صرف الجنيه الانجليزي استبدل منه جنيه فدفع قطعة من الذهب و ١٢ قطعة من الفضة و ٢٧ قطعة من النيكل ثم استبدل منه جنيه آخر فدفع قطعتين من الذهب و ٨ قطع من الفضة و ١٦ قطعة من البرونز استبدل منه جنيه ثالث فدفع ١٦ قطعة من الفضة و ٣ قطع من النيكل و ٤ قطعة من البرونز ثم استبدل منه جنيه رابع فدفع ١٨ قطعة من الفضة و ١٨ قطعة من النيكل وخمس قطع من البرونز ثم بعد معرفة أن قطع الذهب متصفة القيمة وكذا قطع الفضة والنيكل والبرونز براد معرفة قيمة القطعة من كل نوع منها بالقرش

(٢١٢) المطلوب تقسيم ٩٢٤٦ فرنكا بين أربعة أشخاص بحيث إذا أخذ الأول فرنكين يأخذ الثاني ٣ فرنكات وإذا أخذ الثاني ٥ فرنكات يأخذ الثالث ٦ فرنكات وإذا أخذ الرابع ٤ فرنكات يأخذ الثالث ٣ فرنكات

(٢١٣) فرس معرضة للبيع فقال زيد انه يمكنه شراؤها لو أخذ ربع ماع عمرو وقال عمرو انه يمكنه شراؤها لو أخذ ثمن ماع بكر وقال بكر انه يمكنه شراؤها لو أخذ نصف ماع زيد وقد وجد أن ما معهم يزيد عن ضعف ثمن الفرس بمقدار ٤ جنيهات فما ثمن الفرس وما مقدار ماع كل واحد منهم

(٢١٤) عدد مركب من أربعة أرقام حاصل جمعها يساوى ١٠١ ورقم العشرات يساوى مجموع رقمي المئين والالوف ورقم الالوف يساوى مجموع رقمي المئين والآحاد وإذا طرح من العدد ١٧٢٨ يبقى عدد مؤلف من أرقام العدد الاول غير أنها مقبولة القريب

المتباينات

(١٣٦) تعريف - المتباينة هي وضع جبرى مركب من كيتين غير متساويتين فإذا كان كية ب أكبر من ج فالوضع ب > ج يسمى متباينة وكية ب تسمى الطرف الاول و ج تسمى الطرف الثانى والكيتان ب و ج قد تكونا موجبتين أو سالبتين أو احدهما موجبة والاخرى سالبة ومما ينبغى ملاحظته ان كل كية موجبة فهي أكبر من صفر وان الصفر أكبر من أى كية سالبة وان

أكبر الكيتين السالبتين ما يكون مقدارها المطلق أصغر
(١٣٧) المتباينتان تكونان متكافئتين متى كانت احدهما
نتيجة عن الاخرى وبالعكس فاذا كانت كمية ب أكبر من
فالفارق ب - ح يكون موجبا وبالعكس اذا كان ب - ح
موجبا فالكمية ب تكون أكبر من ح وحينئذ المتباينتان ب < ح
ب - ح < ح . متكافئتان

(١٣٨) من المهم معرفة القواعد التي يمكن اجرائها على
المتباينات بدون أن تختل الشروط المينة فيها ومعرفة ماتفسير به
المتباينات وأنواع تغيرها وان كان في بعض الاحوال تنطبق عليها
قواعد التساوية ولئلا يذكر أهم هذه القواعد فنقول
(١٣٩) قاعدة اذا أضيف أو طرح كمية واحدة من طرفي
متباينة فلا تختل الشروط المينة لها

مثلا اذا أضيف لطرفي المتباينة ب < ح كمية م فيكون ب + م
م < ح + م وذلك لانه يؤخذ من المتباينة المفروضة أن
ب - ح < ٠ . وحيث ان الكمية ب - ح لا تتغير اذا أضيف
وطرح منها كمية م فاذن تكون مكافئة الى ب - ح + م - م
م أو الى ب + م - (ح + م) أى ان هذا الفرق يلزم أن يكون
موجبا وحينئذ يكون ب + م < ح + م

وبمثل ذلك يقال في طرح كمية مثل م من طرفي المتباينة
(١٤٠) ينتج من هذه القاعدة أنه يمكن تحويل أحد من طرف
لاخر وتغير اشارته

(١٤١) قاعدة - اذا ضرب أو قسم طرفا متباينة في أو على كمية واحدة فالناتج يكون متباينة متحدة أو غير متحدة الجهة مع المتباينة المفروضة على حسب ما تكون هذه الكمية موجبة أو سالبة

لتمكن المتباينة $b < c$ المكافئة الى $a - b < a - c$.
 فأولا اذا ضرب طرفاه هذه المتباينة في كمية موجبة m فيكون
 $b < c$ m وذلك لانه لما كانت الكمية $b - c$ موجبة فلا
 تزال كذلك اذا ضربت في أى كمية موجبة مثل m أى
 $(b - c) m < 0$ أو $b m - c m < 0$. ومن هذا يؤخذ أن
 $b m < c m$

ثانيا - اذا ضرب طرفا المتباينة المفروضة في كمية سالبة مثل
 $-m$ يكون $-b > -c$ m وذلك لانه لما كانت الكمية
 $b - c$ موجبة فإذا ضربت في كمية سالبة $-m$ يكون الناتج
 سالبا أى $(b - c) (-m) > 0$ أى

$-b m > -c m$ ($-m > 0$) . وحيث أن الفرق بين $-b m$
 $-c m$ سالب فهذا دليل على أن $-b m > -c m$ m
 ويمثل ذلك يقال في حالة القسمة حيث ان قسمة طرفي المتباينة
 على كمية مثل m هو عين ضربها في $\frac{1}{m}$

تنبيه - هذه القاعدة حقيقة مهما كانت حدود المتباينة
 المفروضة أى سواء كانا موجبين أو سالبين أو أحدهما موجب
 والاخر سالبا

(١٤٢) ينتج من ذلك أولا انه يمكن حذف المقامات من متباينة بطريقة مشابهة لحذفها من المعادلة غير أنه ينبغي ملاحظة تغيير جهة المتباينة في الحالة التي يكون فيها المقام سالبا
ثانيا - يمكن تغيير اشارات المتباينة والنتائج من هذا التغيير يكون متباينة مغايرة للمتباينة المفروضة في الجهة لان هذا التغيير عبارة عن ضرب طرفي المتباينة في - ١

(١٤٣) قاعدة - اذا جمعت متباينتان متحدتان في الجهة على بعضهما طرفا على طرف فان المتباينة الجديدة تكون متممة الجهة معهما

وليبيان ذلك نفرض المتباينتين $\delta < 6$ هـ و $\delta < 6$ هـ
المتباينتان يكافآن الى $\delta - 6$ هـ و $\delta - 6$ هـ
وحيث ان مجموع أى كيتين موجبتين هو موجب فيكون
 $\delta - 6$ هـ + $\delta - 6$ هـ و $\delta - 6$ هـ و $\delta - 6$ هـ
الطرف الثاني ينتج $\delta + 6$ هـ و $\delta + 6$ هـ

تنبيهه اذا كانت المتباينتان المفروضتان مختلفتين في الجهة فليست هنالك قاعدة لمعرفة جهة المتباينة الجديدة وقد تؤل الى متساوية

(١٤٤) قاعدة اذا طرحت متباينة من أخرى مختلفة معها في الجهة طرفا من طرف فان جهة المتباينة الجديدة تكون عين جهة المتباينة المطروح منها

وليبيان ذلك نفرض المتباينتين $\delta < 6$ هـ و $\delta > 6$ هـ

المتباينتان تكافئان الى ϵ - δ و ϵ - δ موجب
ان مجموع أى كيتين موجبتين هو موجب فيكون

٢- س + و - هـ < . وبحويل س 6 + والى الطرف
الثاني ينتج ٢- هـ < س - و

تبييه اذا كانت التباينتان المفروضتان متحدتي الجهة فليست هناك قاعدة لمعرفة جهة التباينة الجديدة

(١٤٥) قاعدة اذا ضربت أى متباينتين ذاتى حدود موجبة ومتحدتى الجهة فى بعضهما طرفا فى طرف على الترتيب فان المتباينة الجديدة تكون متحدة الجهة مع كل من المتباينتين المفروضتين

ولبيان ذلك نفرض المتباينتين $\epsilon < \delta$ و $\delta < \epsilon$ وحيث أن $\delta < \epsilon$ موجبين فيمكن ضرب طرفي المتباينة الأولى في δ والثانية في ϵ ومحدث

هـ < هـ و هـ < د و منهما يكون هـ < د
تنبيهه اذا كانت الحدود الاربعه سالبة فان المتباينة الجديدة
تكون مختلفة الجهة مع المتبائتين المفروضتين

فإذا كان $\angle \delta < \angle \epsilon$ وكان كل من γ و δ هـ و
سالباً ضرب طرفي المتباينة الأولى في هـ والثانية في د ولوحظ أن
ضرب طرفا المتباينة في كمية سالبة يؤدي إلى متباينة مختلفة الجهة
مع المتباينة المفروضة كافي غرة (١٤١) ينتج $\delta > \epsilon$ هـ

٦ د هـ > د و ومنها يكون > هـ د و
ولا يمكن اعطاء قاعدة عمومية متى لم تكن كل الحدود موجبة
أو كلها سالبة

(١٤٦) قاعدة - اذا قسمت متباينتين ذاتي حدود موجبة
ومختلفتين في الجهة على بعضهما طرفا على طرف فان المتباينة
الجديدة تكون متحدة الجهة مع المتباينة المأخوذة مقسوما

فاذا كان > د ٦ هـ > و فيمكن كتابة > د ٦ و < هـ
وبضرب هاتين المتباينتين في بعضهما ينتج
> و < د هـ وبقسمة الطرفين على هـ وينتج

$$\frac{د}{هـ} < \frac{و}{و}$$

تنبيه - اذا كانت الحدود الاربعة سالبة فان المتباينة الجديدة
تكون متحدة في الجهة مع المتباينة المقسوم عليها

فاذا كان > د ٦ هـ > و وكانت الحدود الاربعة سالبة
فيمكن كتابة > د ٦ و < هـ وبضرب هاتين المتباينتين في
بعضهما ينتج

> و > د هـ (بحسب تنبيه نمرة ١٤٥) وبقسمة الطرفين
على هـ وينتج > د هـ

ولا يمكن اعطاء قاعدة عمومية متى لم تكن كل الحدود موجبة
أو كلها سالبة

حل متباينة الدرجة الاولى

(١٤٧) تعريف - يقال ان المتباينة ذات مجهول واحد

وبدرجة أولى متى لم تشتمل الاعلى مجهول واحد من الدرجة الاولى ويشترط أن لا يكون داخلا في مقام ولا تحت علامة جذر .

وكل متباينة من الدرجة الاولى يمكن أيلولتها الى هذه الصورة

$$ح\ س + د < ح\ س + د$$

و ح د ٦ ٦ ح د ٦ ٦ رموز لمقادير معلومة موجبة أو سالبة

(١٠٤٨) قاعدة لحل متباينة بدرجة أولى ومجهول واحد تحذف المقامات والاقواس ان وجدت ثم تحوّل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المعلومة الى الطرف الآخر ثم تختصر

حدود الطرفين ثم يقسم الطرفان على مكرر المجهول

فلحل المتباينة ح س + د < ح س + د تحوّل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المعلومة الى طرف آخر فيحدث ح س - ح س < د - د ثم نأخذ س مضروبا مشتركا في الطرف الاول فيحدث (ح - ح) س < د - د وبقسمة الطرفين على ح - ح يحدث

$$س < \frac{د-د}{ح-ح} \text{ ان كان } ح - ح \text{ موجبا}$$

وأما ان كان ح - ح سالبا فيحدث

$$س > \frac{د-د}{ح-ح}$$

ولحل المتباينة ٤ س - ٣ < ٢ + ٦ س نحذف المقامات فيحدث

٤٠ سم - ١٥ < ١٢ سم + ٢٠ ثم نحول حدود كل نوع

الى طرق فيحدث

٤٠ سم - ١٢ سم < ٢٠ + ١٥ وبالاختصار يحدث

٢٨ سم < ٣٥ وبالقسمة على مكرر سم يحدث

$$\text{سم} < \frac{5}{4}$$

فالنتيابة تتحقق بكل مقدار يفرض للجهول سم بحيث يكون

أكبر من $\frac{5}{4}$

المحلول السالبة

(١٤٩) اذا حلت معادلة أو مجموعة معادلات وكان حلها سالبا

وعوض المجهول أو المجاهيل بهذه المقادير السالبة فلا بد أن

هذه المقادير تحقق تلك المعادلة أو المعادلات وحينئذ فلا مانع

من اعتبار الاعداد السالبة حولا للمعادلة أو المعادلات

لكن متى كانت المجاهيل مينة لكميات مقتضى تعيينها فن المعلوم

أن الاعداد السالبة لاتدل على أدنى كميات وحينئذ فيكون الحل

السالب دالا على الاستحالة

(١٥٠) قاعدة اذا ظهر مقدار سالب لحل معادلة ذات درجة

أولى ومجهول واحد واعتبر هذا المقدار موجبا فإنه يكون محققا

للمعادلة التي يتحصل عليها بتغيير اشارات الحدود التي تحتوى على

المجهول

$$\text{فبحل المعادلة} \quad 12 = \frac{18 + \text{سم}}{4 + \text{سم}}$$

يوجد سه = ٣ - وبأخذ ٣ موجبا يكون حلا لمعادلة
يتحصل عليها بتغيير اشارات الحدود المشتملة على المجهول أى يكون
حلا للمعادلة

$$١٢ = \frac{سه - ١٨}{سه - ٤}$$

اذ يجعلها ينتج أن سه = ٣

وهذه القاعدة نافعة في اصلاح منطوق المسائل التي يكون حلها
سالبا ولنوضح ذلك بحل المسئلة الآتية

(١٥١) مسئلة شخص عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٦ سنة فبعد

كم سنة يصير عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن

الحل نرمز بحرف سه للقدار المطاوب فيكون عمر الاب وقتئذ

٤٠ + سه وعمر الابن ١٦ + سه وحيث انه في ذلك الوقت

يكون عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن تحدث المعادلة

٤٠ + سه = ٣ (١٦ + سه) ويجعلها بحدن

$$سه = ٤ -$$

وهذا الحل يدل على أن المسئلة مستحيلة فإذا اعتبره هذا المقدار موجبا

كان حلا لمعادلة ~~بممكن~~ الحصول عليها بتغيير اشارات الحدود

المشتملة على المجهول أعنى يكون حلا للمعادلة

٤٠ - سه = ٣ (١٦ - سه) اذ يجعلها يوجد أن سه = ٤

وهذه المعادلة تكون ترجحة للمسئلة الآتية

شخص عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٦ سنة فقبل كم سنة كان عمر

الاب ثلاثة أمثال عمر الابن ولا شك أن منطوق هذه المسئلة

قريب جدا من منطوق المسئلة المفروضة ولا فرق بينهما الا بتغيير كلمة (بعد كم سنة) الى (قبل كم سنة) حيث ان الوقت الذي يوفى بشروط المسئلة قد مضى قبل بلوغهما سن ٤٠ ١٦٦ (١٥٣) تنبيه - يؤخذ مما تقدم أنه متى كان الحل سالبا يدل على تحريف في المسئلة ويمكن اصلاحه بتغييره في المعنى المضاد

فاذا فرض أن المطلوب حساب مقدار يلزم اضافته ووجد سالبا فيمكن اصلاح المنطوق بأن يلزم طرحه

واذا فرض أن المطلوب حساب زمن في المستقبل ووجد سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتباره في الماضي

واذا كان المطلوب حساب طول مستقيم يؤخذ على عيين نقطة معينة ووجد سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتبار أخذ البعد اللازم على يسار تلك النقطة

واذا كان المراد البحث عن درجة حرارة فوق الصفر ووجد المقدار سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتبار الدرجات تحت الصفر وهكذا

حالة الاستحالة

(١٥٣) المسئلة تكون مستحيلة الحل اذا كانت باحدى الصور الآتية

الاولى أن يكون لها حل سالب ولا يقبل تأويلا

الثانية أن تكون مقادير مجاهيلها ليست مطابقة لمنطوقها كأن
دل المجهول الداخل في مسألة على أشخاص أو أشجار أو أشياء
غير قابلة للتجزئة ووجد مقدار كسرا عوضا عن أن يكون
عددا صحيحا

الثالثة أن يؤل مقدار المجهول الى هذه الصورة $\frac{ج}{ح}$ أعني يكون
مه $\frac{ج}{ح}$ اذ معنى ذلك أنه يلزم البحث عن عدد اذا ضرب في
صفر ينتج كمية ح وحيث ان جميع الاعداد المحدودة اذا ضربت
في صفر لا ينتج من ذلك الا صفر وهو طبيعة أقل من كمية ح
فيكون مقدار المجهول أكبر من أى كمية أى لانهاى ويرمز له
عادة بالعلامة ∞ ولنوضح ذلك بحل المسائل الآتية

(١٥٤) المسئلة الاولى صانع كثير الانقطاع عن الشغل رغب
أن يشتغل في ورشة فاشترط عليه الرئيس أن تكون أجرته
اليومية $\frac{ج}{ح}$ ولكن اذا تأخر عن الحضور يلتزم بغرامة قدرها
 $\frac{ج}{ح}$ عن كل يوم فبعد ستة أيام طلب ريس الورشة من الصانع
 $\frac{ج}{ح}$ بحسب شروطهما فما عدد الايام التى اشتغلها

الحل نرمز لعدد الايام التى اشتغلها بحرف مه فتكون أجرته
فيها ١٠ مه وتكون الايام التى انقطع فيها عن الشغل هى ٦
— مه والغرامة التى يدفعها عنها هى ٥ (٦ — مه) وحيث
ان مقدار الغرامة أكبر من الاجرة بمقدار $\frac{ج}{ح}$ فيجسد المعادلة
١٠ مه + ٣٥ = ٥ (٦ — مه) وبحل هذه المعادلة يوجد

$$\frac{١}{٣} = \text{مه}$$

وحيث ان هذا المقدار السالب لا معنى له ولا يمكن تأويله فتكون
المسئلة مستحيلة الحل ومن دقق النظر في المنطوق تظهر له الاستحالة
اذ انقطاعه المدة كلها لا يؤدي الى دفع $\frac{1}{10}$

(١٥٥) المسئلة الثانية - مكارى كاف ينقل ٢٣ قنطارا فتبناها
على ثمان دواب من جمال وبغال فكان حمل كل حمل ٤ قناطر
وحمل كل بغل قنطاران فكم عدد كل نوع

الحل نرمز بحرف x لعدد الجمال فيكون $8 - x$ هو عدد
البغال ويكون ما حملته الجمال هو $4x$ وما حملته البغال
 $2(8 - x)$ وحيث ان جملة ما نقل ٢٣ قنطارا فتحدث المعادلة

$$4x + 2(8 - x) = 23 \text{ وبحلها يوجد}$$

$$x = 3.5$$

أعني أن عدد الجمال هو ٣.٥ وبناء على ذلك يكون عدد البغال
٥.٥ وحيث ان كلا من عدد الجمال والبغال يجب أن يكون
عددا صحيحا فالمسئلة تكون مستحيلة الحل

(١٥٦) المسئلة الثالثة شخص وضع ٣٠٠ جنيه في تجارة
مدة ٤ سنوات وكان يرجع فيها مقدارا مخصوصا عن كل مائة في
السنة ووضع ٤٠٠ جنيه في تجارة مدة ٣ سنوات وكان يرجع
فيها مقدارا مساويا لما يرجعه عن كل مائة في السنة للبلغ الاول
وبعد ذلك وجد أن ربح المبالغ الثاني يزيد عن الاول ٥٠ جنيها
فما ربح المائة في كل من المبلغين

الحل نرمز لربح المائة في كل من المبلغين بحرف x فبلغ $\frac{1}{100}$

يرجى في ٣ سنين $\frac{٣٠٠ \times ٤ \times ١٠٠}{١٠٠}$ م = أى ١٢ م والمبلغ الثانى يرجى
 بالسعر عينه في ٤ سنين $\frac{٤٠٠ \times ٣ \times ١٠٠}{١٠٠}$ م = ١٢ م
 وحيث انه يؤخذ من المنطوق أن ربح المبلغ الثانى يزيد عن
 الاول ١٥ جنيتها فتحدث المعادلة

$$١٢ م + ١٥ = ١٢ م \quad \text{وبحل هذه المعادلة}$$

$$\text{يوجد م} = \frac{١٥}{١} = ١٥$$

وحيث انه لا يوجد عدد اذا ضرب في صفر ينتج ١٥ فتكون المسئلة
 مستحيلة الحل

حالة عدم التعيين

(١٥٧) المسئلة تكون غير معينة الحل اذا كان عدد المعادلات
 اقل من عدد المجاهيل أو ظهر مقدار المجهول بهذه الصورة ÷
 أى م = ÷ ومعنى ذلك ايجاد عدد اذا ضرب في صفر ينتج
 صفرا وحيث ان كل عدد اذا ضرب في صفر ينتج صفرا فيعلم أن
 أى عدد يحقق المسئلة وحينئذ فلا تكون معينة الحل
 ولناأت على ذلك بأمثلة فنقول

(١٥٨) المسئلة الاولى - ما هما العددين اللذان خارج
 قسمتهما ٣

الحل نفرض العددين م ٦ م فعلى حسب منطوق المسئلة
 يحدث $\frac{م}{٣} = \frac{٦ م}{٣}$

وبحل هذه المعادلة يعطى مقدار اختيارى وليكن ١ الى م

فيوجد $\frac{1}{3} = 3$ ويجعل هذه المعادلة بالنسبة الى صه ينتج صه = $\frac{1}{3}$ فالعددان ١ و $\frac{1}{3}$ يحلان المسئلة
واذا أعطى الى صه مقدار آخر اختياري مثل ٢ يوجد أن صه
= $\frac{2}{3}$ وإذا جعل صه = ٣ يوجد أن صه = ١ وإذا جعل صه
= ٤ نجد أن صه = $\frac{4}{3}$ وهكذا فيرى أن المسئلة غير معينة
الحل

(١٥٩) المسئلة الثانية - ما السعر الذي يوضع به كل من
المبلغين ٤٥ جنيتها و ١٣٥ جنيتها حتى يكون ايراد الثاني ثلاثة
أمثال ايراد الاول

الحل يفرض أن السعر صه فيكون ايراد ٤٥ جنيتها هو $\frac{45}{100}صه$
وايراد الثاني $\frac{135}{100}صه$ وعلى حسب منطوق المسئلة يكون
 $3 \times \frac{45}{100}صه = \frac{135}{100}صه$ وبجذف المقام يحدث
 $135 صه = 135 صه$ وبالتحويل يحدث
 $135 صه - 135 صه = 0$ وباخذ صه مضروباً مشتركاً
يحدث $(135 - 135) صه = 0$ أو
 $صه = 0$

أعني أن المطلوب إيجاد عدد اذا ضرب في صفر ينتج صفراً وحيث
ان أى عدد اذا ضرب في صفر ينتج صفراً فيكون أى عدد يصلح
الحل المسئلة

وبالتأمل في منطوق المسئلة يسهل معرفة أنها غير معينة الحل
حيث ان المبلغ الثاني ثلاثة أمثال الاول فأى سعر حسب لهما

ينتج منه أن اراد الثانى ثلاثة أمثال الاول

مناقشة المسائل

(١٦٠) مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل اليها

الحل بفروض مختلفة على المعاليم

ولايضاح ذلك نأخذ المسئلة الآتية ونجرى مناقشتها

(١٦١) ما هو العدد اللازم اضافته لحدى الكسر $\frac{2}{3}$

ليكون الناتج مساويا لكمية م

الحل نفرض أن العدد المطلوب هو م فعلى حسب المنطوق

نحدث المعادلة

$$م = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = م - \frac{2}{3}$$

ولنأخذ هذه المسئلة نعطي فروضا مختلفة للمعاليم

أولا - اذا فرض أن $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ م $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ بأن جعل

$$= 4 - 2 = 2 \text{ م } 6 \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ يؤل مقدار م السابق الى}$$

$$2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2 - \frac{2}{3} \times 6}{\frac{2}{3} - 1}$$

أعني أنه اذا أضيف ٢ الى حدى الكسر $\frac{2}{3}$ يصير $\frac{4}{6}$ أى $\frac{2}{3}$

وهذا ناتج لا اشكال فيه

ثانيا - اذا فرض أن $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ م $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ بأن جعل

$$= 5 - 2 = 3 \text{ م } 6 \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \text{ يؤل مقدار م السابق الى}$$

$$٢ = \frac{٥ - ٤}{\frac{1}{٢}} = \frac{٥ - ٨ \times \frac{1}{٢}}{\frac{1}{٢} - ١}$$

والمقدار ٢ السالب يدل على عدم امكان حل المسئلة
وفي الواقع ان المسئلة مستحيلة لانه بالتأمل لهذا الفرض يرى
أن الكسر $\frac{٥}{٨}$ أكبر من نصف ومعلوم انه اذا أضيف عدد
واحد لحدي الكسر ازاد ذلك الكسر فاذن لا يمكن اضافة عدد
واحد الى حديه ليكون الناتج $\frac{1}{٢}$

ثالثا اذا فرض أن $\frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$ و $١ = ١$ بأن جعل $٥ = ٥$
 $٦ = ٦$ و $٩ = ٩$ و $١ = ١$ يؤل مقدار سه السابق الى

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٥ - ٩ \times ١}{١ - ١}$$

والمقدار $\frac{٤}{٥}$ يدل على كية لا نهاية لها واذن فتكون المسئلة
مستحيلة الحل

وفي الواقع انها كذلك لانه بالتأمل يمكن مشاهدة هذه الاستحالة
اذ أن الكسر لا يساوى واحدا الا اذا كان بسطه مساويا لمقامه
وحيث ان حدي الكسر غير متساويين أى بينهما فرق ومعلوم
انه باضافة عدد واحد اليهما لا يزال هذا الفرق ثابتا ولا يمكن
محوه لينساوى الحدان فقد تبين وجه الاستحالة

رابعا اذا فرض أن $\frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$ و $١ = ١$ بأن جعل $٥ = ٥$
 $٦ = ٥$ و $٩ = ٥$ و $١ = ١$ يؤل مقدار سه السابق الى

$$\frac{٥ - ٥ \times ١}{١ - ١}$$

$$\div =$$

والمقدار \div يدل على عدم تعين المسئلة وبالتأمل في هذا الفرض يرى أن حدى الكسر $\frac{0}{0}$ متساويان وأى عدد أصغيف اليهما لا يغير التساوى بينهما وبذلك ينتج كسر موف بالشروط المطلوب (١٦٢) تنبيه - ينتج مما تقدم أن مقدار المجهول في مسئلة يكون باحدى الصور الاربعة الآتية

وهى إما أن يكون موجبا أو يكون سالبا أو يكون كمية غير محدودة مثل $\frac{0}{0}$ أو يكون كمية غير معينة مثل $\frac{0}{0}$

فأما الحلول الموجبة فانها تحدث غالبا عند توفر شروط المسئلة وصحة منطقها وامكان وضعها جيدا على صورة معادلة وحيدة تدل على امكان حل المسئلة الا في أحوال استثنائية تدل فيها على الاستحالة كأن كان المطلوب البحث عن مقدار صحيح ووجد كسريا

وأما الحلول السالبة فتدل على استحالة حل المسئلة وقد تكون الاستحالة ناشئة من فساد في منطق المسئلة ويمكن في بعض الاحوال اصلاح ذلك المنطوق

وأما الحلول غير المحدودة أى اللانهائية فتدل على استحالة حل المسئلة أيضا

وأما الحلول غير المعينة فتدل على أن للمسئلة جملة حلول غير أنه في بعض الاحيان تختبر بعض تلك الحلول ويؤخذ اللائق منها بالمسئلة المفروضة

تمارين على المحلول السالبة المستحيلة والغير المعينة
(٢١٥) أب عمره ٤٥ سنة وعمر ابنه ١٩ سنة فبعد كم سنة يصير
عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن

(٢١٦) أجرة نقل كل عشرة كيلوجرام من البضاعة بالسكة
الحديد لمسافة كيلومتر واحد هي ١٨ مليم ويؤخذ ٢٥ مليم
عن كل رسالة (أجرة الشحن والتفريغ) فما مقدار المسافة التي
يمكن أن ينقل اليها ٢٠ رسالة زنة الواحدة ١٠٠ كيلوجرام بمبلغ
٣٩٢ مليم

(٢١٧) ١٢ ساعة جيب بعضها من الذهب والبعض من الفضة
قومت بمبلغ ١٣٠٦ شلنات وقدرت الساعة الذهب بمبلغ ١٥٠
شلنا والساعة الفضة بمبلغ ٣٦ شلنا فما عدد ساعات كل نوع
(٢١٨) ما هو العدد الذي اذا أضيف اليه ثلاثة أعشاره وطرح
من المجموع ٦٠ كان الباقي مساويا لنصف هذا العدد مضافا اليه
أربعة أمثال باقي طرح ١٥ من خمس ذلك العدد

(٢١٩) ما هو العدد الذي اذا أضيف الى حدى الكسر $\frac{٥}{٧}$
يكون الناتج مساويا لواحد

(٢٢٠) ساعتان ابتدأ في السير في وقت واحد على الطريق أ ب
في اتجاه واحد وأحدهما ابتدأ من نقطة أ وسرعته ع والثاني
ابتدأ من نقطة ب وسرعته ع والساعي المبتدئ من ب متقدم
عن المبتدئ من أ بالمسافة د والمطلوب معرفة بعد النقطة التي
يتقابل فيها الساعيان على الطريق أ ب بحسوبا من نقطة أ

(ومناقشة هذه المسئلة)

المربع والجذر التربيعي

(١٦٣) تعريف - 'مربع أى كمية هو حاصل ضرب عاملين

مساويين لها

مثلا مربع د هو $د \times د = د^2$ ومربع - د هو $د - \times د = د^2$

(١٦٤) قاعدة - مربع حاصل ضرب عدة عوامل يساوى

حاصل ضرب مربعاتها

مثلا $(د ه)^2 = د^2 ه^2$ لان $(د ه) (د ه) = د د ه ه$ $\times د ه = د د ه ه ه ه = د^2 ه^2$

(١٦٥) نتيجة لتربيع حد يربع مكرره وتضاعف أسس حروفه

فربع $٣ د^٢ ه^٣ = ٩ د^٤ ه^٦$ ومربع $\frac{١}{١٠} د ه هو \frac{١}{١٠٠} د^٢ ه^٢$ $\frac{١}{١٠٠} د^٢ ه^٢$

تنبيه - تقدم بـ ٤٢ قانون مربع كمية ذات حدين وبـ ٤٣

قانون مربع كمية كثيرة الحدود

(١٦٦) تعريف - قوة أى كمية بدرجة ما هى حاصل ضرب

عوامل مساوية لها عددها بقدر درجة القوة

أعنى $د^٢ = د \times د \times د \times د \times د \times د \dots$ بقدروبالقياس على ما سبق يكون $(د ه)^٢ = د^٢ ه^٢$ $(٣ د ه)^٢ = ٩ د^٢ ه^٢$

تنبيه تقدم بـ ٣٤ بيان علامات قوى الحدود الموجبة والسالبة

(١٦٧) تعريف - الجذر التربيعي لكمية هو كمية اذا رفعت الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

$$\text{مثلا } \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{64} = 8$$

لانه اذا رفع كل منها الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

(١٦٨) قاعدة - الجذر التربيعي لم حاصل ضرب عدة عوامل

يساوى حاصل ضرب الجذور التربيعية لها

$$\text{مثلا } \sqrt{49 \times 64} = \sqrt{49} \times \sqrt{64} \quad \text{لان } \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$= \sqrt{49} \times \sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$$

(١٦٩) نتيجة لاجزاء الجذر التربيعي لحد يؤخذ الجذر التربيعي

لمكرره وتنصف اسس حروفه

$$\text{مثلا } \sqrt{49 \times 64} = \sqrt{49} \times \sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$$

(١٧٠) تنبيه الحد يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا

كاملا وأسس حروفه زوجية وفي هذه الحالة يمكن أخذ جذره

أما اذا لم يكن مربعا كاملا فين جذره بوضعه تحت علامة

الجذر ويسمى مقدارا غير جذري أو جذرا أصم

(١٧١) تعريف الجذر المسمى لكمية هو كمية اذا رفعت الى

القوة الميمية تنتج الكمية الاولى فاذا كان $\sqrt[3]{8} = 2$ يكون $\sqrt[3]{8}$

$\sqrt[3]{8} = 2$

وبالقياض على ماسبق يكون $\sqrt[3]{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز}}$

$$\sqrt[3]{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز}} = \sqrt[3]{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز}}$$

(١٧٢) مقادير الجذور التربيعية - لكل كمية موجبة جذران تربيعيان متساويان في المقدار المطلق ومختلفان في العلامة

$$\text{مثلا } \sqrt{25} = 5 \text{ و } \sqrt{25} = -5$$

$$\text{لان } 5 + 5 = 10 \text{ و } 5 - 5 = 0 \text{ و } -5 + 5 = 0 \text{ و } -5 - 5 = -10$$

ويكتب $\sqrt{25} = \pm 5$ ويرأ زائدا أو ناقصا خمسة

$$\text{وعوما } \sqrt{25} = \pm 5$$

(١٧٣) تنبيهه حيث ان القوى الفردية للحدود الموجبة تكون موجبة وللحدود السالبة تكون سالبة فيؤخذ من ذلك أن علامة الجذر التكعيبي لحد هي عين علامة ذلك الحد أعني

$$\sqrt[3]{\text{هـ}} = \text{هـ} \text{ و } \sqrt[3]{\text{و}} = \text{و} \text{ و } \sqrt[3]{\text{ز}} = \text{ز}$$

(١٧٤) قاعدة - لايجاد الجذر التربيعي لكمية كثيرة الحدود

ترتب هذه الكمية بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية

لحرف فيها ويؤخذ الجذر التربيعي لاول حد منها فينتج أول حد

من الجذر يطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم يقسم أول حد

من الباقي على ضعف الجذر فينتج الحد الثاني من الجذر ثم يضعف

أول حد من الجذر ويضاف إليه الحد الثاني ويضرب المجموع في

الحد الثاني ويطرح الحاصل من الباقي الاول ثم يقسم أول

حد من الباقي الثاني على ضعف أول حد من الجذر فينتج ثالث
حد من الجذر ثم يضعف الحدان الاولان ويضاف لهما الحد
الثالث ويضرب المجموع في الحد الثالث ويطرح الحاصل من
الباقي الثاني ويستمر في العمل هكذا حتى تنتهي العملية

مثلا لايجاد الجذر التربيعي لكيفية $٩ \text{ ح}^٢ + ٤٦ \text{ ح} + ٢٥$
 $٥ \text{ ح} - ٢٤ \text{ ح} + ٤٠$ نرتبها بالنسبة للدرجات التنازلية
لحرف $ح$ ونجري العمل هكذا

$٩ \text{ ح}^٢ + ٤٦ \text{ ح} + ٢٥ - ٥ \text{ ح} + ٢٤ \text{ ح} - ٤٠$	$٩ \text{ ح}^٢ + ٤١ \text{ ح} - ١٥$
$٤١ \text{ ح} - ١٥$	$٤١ \text{ ح}^٢ + ١٦٦ \text{ ح} + ١٠١$
$٤١ \text{ ح} - ١٥$	$٤١ \text{ ح}^٢ + ١٦٦ \text{ ح} + ١٠١$
$٤١ \text{ ح} - ١٥$	$٤١ \text{ ح}^٢ + ١٦٦ \text{ ح} + ١٠١$
$٤١ \text{ ح} - ١٥$	$٤١ \text{ ح}^٢ + ١٦٦ \text{ ح} + ١٠١$
$٤١ \text{ ح} - ١٥$	$٤١ \text{ ح}^٢ + ١٦٦ \text{ ح} + ١٠١$

وكيفية العمل أن نستخرج جذر الحد الاول $٩ \text{ ح}^٢$ فينتج ٣ ح
نربع هذا الحد ونطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم نقسم
الحد الاول من الباقي وهو $٤١ \text{ ح} - ١٥$ على ضعف الجذر أي
على ٦ ح فينتج ٤ وهو ثاني حد من الجذر ثم نضعف
الحد الاول ونضيف الى هذا الضعف الحد الثاني فينتج $٦ \text{ ح} -$
 $٤ \text{ ح} + ٢٤ \text{ ح} - ٤٠$ وهو الثاني وهو $٤ \text{ ح} + ٢٤ \text{ ح} - ٤٠$
 $٥ \text{ ح} + ١٦ \text{ ح} + ٢٥$ ويطرح هذا الحاصل من الباقي الاول

ثم يقسم أول حد من الباقي الثاني وهو ٣٠ ح ٢ د ٢ على ضعف
الحد الاول من الجذر وهو ٦ ح ٢ فينتج ٥ د ٢ وهو ثالث حدين
الجذر ثم تضاعف الحدين الاولين وتضيف لهما الحد الثالث
فينتج ٦ ح ٢ - ٨ د ٢ + ٥ د ٢ نضربه في الحد الثالث ٥ د ٢
ينتج ٣٠ ح ٢ د ٢ - ٤٠ د ٢ + ٢٥ د ٢ فنطرح هذا الحاصل
من الباقي الثاني فلا يبقى شئ

(١٧٥) تنبيه لا يمكن إيجاد الجذر التربيعي لكبة الا اذا كانت
مربعاً كاملاً

ويعلم أن الكمية غير مربع كامل بعد ترتيبها بالنسبة للدرجات
التضاعفية أو التنازلية لحرف فيها اذا كان الحد الاول غير
مربع كامل أو كان الحد الثاني لا يقبل القسمة على ضعف جذر
الحد الاول وكذلك اذا كان الحد الاخير غير مربع كامل
أو كان الحد الذي قبله مباشرة لا يقبل القسمة على ضعف جذره
أو كان الحد الاول من أى باق لا يقبل القسمة على ضعف الحد
الاول من الجذر

(١٧٦) تنبيه ذات الحدين لا تكون مربعاً كاملاً مطلقاً
لأن مربع الحد هو حد واحد ومربع ذات الحدين يشتمل على ثلاثة
حدود ومربع كثيرة الحدود هو كمية كثيرة الحدود

تمارين

(٢٢١) ما مربع كل من الكميات ٦ ح ٢ - ٥ د ٢ ه ٢ ٣ د ٢

الجذرين $\overline{٧٩} \text{ هـ} - \overline{٦} - \overline{١٤} \text{ هـ} - \overline{٥} \text{ هـ}$ وباقي طرح
 $\overline{٧٥} \text{ هـ}$ من $\overline{٧٨} \text{ هـ}$ هو $\overline{٧٣} \text{ هـ}$ وباقي طرح $\overline{٥} \text{ هـ}$
 من $\overline{٧٨} \text{ هـ}$ هو $\overline{١٣} \text{ هـ}$

تنبيه اذا كانت الجذور غير متشابهة فين مجموعها أو باقي طرحها
 بواسطة العلامات فمجموع الجذرين $\overline{٧٣} \text{ هـ} + \overline{٦٧} \text{ هـ}$ هو
 $\overline{٧٣} \text{ هـ} + \overline{٧٧} \text{ هـ}$ وباقي طرح الاول من الثاني هو $\overline{٧٧} \text{ هـ}$
 $- \overline{٧٣} \text{ هـ}$

(١٧٩) قاعدة - لضرب جذرين متعدي الدليل في بعضهما
 يضرب المكرران في بعضهما ويؤخذ جذر حاصل ضربهما
 بالدليل الاصيل

فعلى هذا يكون $\overline{٧٥} \text{ هـ} \times \overline{٧٧} \text{ هـ} = \overline{٢٥} \text{ هـ}$
 وذلك لانه اذا فرض أن $\overline{٧٥} \text{ هـ} \times \overline{٧٧} \text{ هـ} = \text{سـ}$ ورفع الطرفان
 الى القوة الثانية ينتج

$\overline{٥} \text{ هـ} \times \overline{٧} \text{ هـ} = \text{سـ}$ ويكون
 وبأخذ جذر الطرفين يحدث
 $\overline{٥} \text{ هـ} \times \overline{٧٧} \text{ هـ} = \text{سـ}$ وباستعاضة سـ بمقدارها ينتج
 $\overline{٢٥} \text{ هـ} = \overline{٧٥} \text{ هـ} \times \overline{٧٧} \text{ هـ}$

(١٨٠) قاعدة لقسمة جذرين متعدي الدليل على بعضهما
 يقسم المكرران على بعضهما ثم تقسم الكميّتان اللتان تحت

علامة الجذر ويؤخذ جذر الخارج بالدليل الاصل

$$\text{مثلا } \sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{12} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{3}$$

وذلك لانه اذا فرض ان $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3}$ يكون

$$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{12}$$

وبتربيع طرفي هذه المساوية يحدث

$$12 : 4 = 3 \text{ وبقسمة الطرفين على } 4 \text{ ينتج}$$

$$\frac{12}{4} = 3 \text{ أو}$$

$$\frac{12}{4} = 3 \text{ وبأخذ جذر الطرفين ينتج}$$

$$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3} \text{ وإذا وضع بدلا عن } \sqrt[5]{3} \text{ مقداره ينتج}$$

$$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{12} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{3}$$

(١٨١) تنبيه - قواعد عمليات الجذور وان كانت عامة غير

أن ضرورة استعمالها انما يكون في الجذور الصماء

(١٨٢) اخراج عامل من تحت علامة الجذر - أولا اذا

احتوى جذر تربيعي أصم على عوامل زوجية يمكن اخراج

تلك العوامل من تحت علامة الجذر واستخراج جذرها ثم ضرب

الناقص في الكمية الباقية

مثلا $\sqrt{4} = 2$ وذلك لان الكمية 4 هي حامل

ضرب 4 في 1 وبمقتضى غرة 179 يكون $\sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{4} = 2$$

فانيا اذا احتوى الجذر الاصح على عوامل ذات أسس فردية

(غير الواحد) يحال الى عاملين أحدهما مربع كامل ويؤخذ جذره ثم يضرب الناتج في الكمية الباقية

$$\text{مثلا } \sqrt{2^0 2^4} = \sqrt{2^2} \sqrt{2^2} = 2 \sqrt{2^2} = 2 \sqrt{4} = 4$$

ويستدل على ذلك كافي المثال السابق

تنبيه - تسمى هذه العملية باختصار الجذر الاصم

(١٨٣) ادخال مكررت تحت علامة الجذر - لذلك يربع هـ هذا المربع ويضرب في الكمية التي تحت علامة الجذر ثم يوضع الناتج تحت علامة الجذر

$$\text{مثلا } \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2} \sqrt{2^1} = 2 \sqrt{2}$$

$$\text{لان } \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^1} = 2 \sqrt{2}$$

ازالة بعض الجذور

(١٨٤) ازالة جذور ضما من المقامات

أولا - اذا كان مقام كسر جذرا أصم فيمكن ازالته بضرب جدى الكسر في هذا الجذر

$$\text{مثلا } \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^2} \sqrt{2^1}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = 1$$

ثانيا - اذا كان مقام كسر كمية ذات حدين أحدهما أو كلاهما جذر أصم فيمكن حذف الجذر الاصم بضرب جدى الكسر في كمية مثلها مع تغيير علامة الحد الثاني

$$\frac{(\sqrt{u} - s)}{(\sqrt{u} - s)(\sqrt{u} + s)} = \frac{s}{\sqrt{u} + s}$$

المثال الاول

$$\frac{\sqrt{u} - s}{u - s} =$$

$$\frac{(\sqrt{u} + s)(\sqrt{u} - s)}{(\sqrt{u} + s)(\sqrt{u} - s)} = \frac{s}{\sqrt{u} - s}$$

المثال الثاني

$$\frac{\sqrt{u} + s}{u - s} =$$

(١٨٥) قاعدة - اذا اشتلت معادلة على جذر تربيعي يمكن ازالته منها ولذلك يوضع الجذر بانقراده في أحد الطرفين وباقى الحدود في الطرف الآخر ثم يربع الطرفان

ففي المعادلة $\sqrt{u} + s =$ تحول s الى الطرف الثاني فيحدث $\sqrt{u} = s -$ ثم نربع الطرفين فيحدث $u = s^2 - 2s + s^2$

واذا احتوت المعادلة على جذرين تربيعيين فقد يمكن ازالتهما

ففي المعادلة $\sqrt{u} + \sqrt{v} = s -$ نحول \sqrt{v} الى الطرف الثاني فيحدث

$$\sqrt{u} - s = -\sqrt{v}$$

فيحدث $\text{سم} - \text{ح} = \text{د} - \text{ز} \text{ و } \text{ز} - \text{د} = \text{ح} - \text{سم}$ وبالاختصار والتحويل يحدث

$\text{د} \text{ ز} \text{ سم} = \text{د} + \text{ح} \text{ و } \text{بترتيب الطرفين}$
 $\text{د} \text{ ز} \text{ سم} = \text{د} + \text{ز} \text{ ح} + \text{ح} + \text{د}$ يحدث

الكليات التخيلية

(١٨٦) من المعلوم أن مربع أى عدد موجب أو سالب لا يكون الا موجبا وحينئذ فكل كمية سالبة لا يكون لها جذر تربيعى مطلقا وتنى وضعت تحت علامة الجذر تسمى كمية تخيلية مثلا $\sqrt{-25}$ و $\sqrt{-2}$ تسمى كمية تخيلية اذ لا يوجد كمية موجبة ولا سالبة اذا رفعت الى القوة الثانية ينتج -25 أو -2

(١٨٧) كل كمية تخيلية يمكن تحليلها الى عاملين أحدهما جذر هذه الكمية مأخوذة موجبة والثانى $\sqrt{-1}$

مثلا $\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$ و $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
 $\sqrt{-6} = \sqrt{-1} \times \sqrt{6}$ وحيث أنه يمكن إيجاد $\sqrt{-1}$
 فإذا رمز له بحرف ح يكون $\text{ح}^2 = -1$
 فالعامل التخيلي الوحيد هو $\sqrt{-1}$

(١٨٨) عمليات الكليات التخيلية - قبل الكلام على

عمليات الكميات التخيلية بحث عن القوى المختلفة للعامل

التخيلي $\sqrt{-1}$ فنجد

$$\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^1 \text{ أولا}$$

$$-1 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 \text{ ثانيا}$$

$$1 = \sqrt{-1} \times (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^3 \text{ ثالثا}$$

$$-1 = (\sqrt{-1})^3 \times (\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^4 \text{ رابعا}$$

$$1 = 1 - x$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \times (\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^5 \text{ خامسا}$$

وجبت ان القوة الخامسة هي عين الاولى فبالاستمرار يشاهد أن القوة السادسة عين الثانية وهكذا أعنى أن قوى العامل التخيلي

$\sqrt{-1}$ تتغير تغيرا دوريا أربعة فأربعة وتأخذ في كل دور

الاربع الصور السابقة

إذا تقرر هذا فيلاحظ في ضرب وقسمة الكميات التخيلية تحليل

كل منها الى عاملين كما في (١٨٧) واجراء عمليات الضرب على

العامل التخيلي $\sqrt{-1}$ بمقتضى ما ذكر آنفا . اما عمليات جمع

وطرح الكميات التخيلية فينطبق عليها قواعد عمليات الجذور

الصماء ولنوضح ذلك بالأمثلة الآتية

$$\sqrt{-1} 60 = \sqrt{-1} 50 = \sqrt{-1} 3 + \sqrt{-1} 2 \text{ (١)}$$

$$\sqrt{-1} 64 = \sqrt{-1} 4 = \sqrt{-1} 3 - \sqrt{-1} 7 \text{ (٢)}$$

$$= \overline{1-2} \times \overline{1-2} = \overline{2-1} \times \overline{2-1} \quad (2)$$

$$\times \overline{1-2} = \overline{2-1} \times \overline{2-1} \times \overline{2-1} \quad (3)$$

$$\overline{1-2} \times \overline{1-2} = \overline{1-2} \times \overline{1-2}$$

$$\overline{1-2} : \overline{1-2} = \overline{2-1} : \overline{2-1} \quad (4)$$

$$\frac{2}{1} =$$

$$\overline{1-2} = \frac{\overline{1-2}}{1} = 1 : \overline{2-1} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{1-2}}{1} = \frac{\overline{2-1}}{1} = \overline{2-1} = \overline{2-1} : 1 \quad (6)$$

$$\overline{1-2} =$$

وينتج مما تقدم أن حاصل ضرب كيتين تخيليتين هو كمية حقيقية
سلبية (انظر مثال ٣) وحاصل ضرب ثلاث كميات تخيلية
هو كمية سالبة تخيلية (انظر مثال ٤)

وخارج قسمة كيتين تخيليتين هو كمية حقيقية (انظر مثال ٥)
وخارج قسمة كمية تخيلية على كمية حقيقية هو كمية تخيلية (انظر
مثال ٦) وخارج قسمة كمية حقيقية على كمية تخيلية هو كمية
تخيلية (انظر مثال ٧)

تمارين

المطلوب تحويل الاوضاع الجبرية الآتية الى اوضاع
مكافئة لها

$$(228) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

$$(229) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

$$(230) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

$$(231) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

$$(232) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

$$(233) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{11} - \sqrt{13} - \sqrt{17} - \sqrt{19} - \sqrt{23} - \sqrt{29} - \sqrt{31} - \sqrt{37} - \sqrt{41} - \sqrt{43} - \sqrt{47} - \sqrt{53} - \sqrt{59} - \sqrt{61} - \sqrt{67} - \sqrt{71} - \sqrt{73} - \sqrt{79} - \sqrt{83} - \sqrt{89} - \sqrt{97} - \sqrt{101} - \sqrt{103} - \sqrt{107} - \sqrt{109} - \sqrt{113} - \sqrt{127} - \sqrt{131} - \sqrt{137} - \sqrt{149} - \sqrt{151} - \sqrt{157} - \sqrt{163} - \sqrt{167} - \sqrt{173} - \sqrt{179} - \sqrt{181} - \sqrt{187} - \sqrt{191} - \sqrt{193} - \sqrt{197} - \sqrt{199}$$

المطلوب ازالة الجذور من مقامات الكسور الآتية

$$(234) \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \frac{\sqrt{11} + \sqrt{13}}{\sqrt{17} + \sqrt{19}} + \frac{\sqrt{17} + \sqrt{19}}{\sqrt{23} + \sqrt{29}} + \frac{\sqrt{23} + \sqrt{29}}{\sqrt{31} + \sqrt{37}} + \frac{\sqrt{31} + \sqrt{37}}{\sqrt{41} + \sqrt{43}} + \frac{\sqrt{41} + \sqrt{43}}{\sqrt{47} + \sqrt{53}} + \frac{\sqrt{47} + \sqrt{53}}{\sqrt{59} + \sqrt{61}} + \frac{\sqrt{59} + \sqrt{61}}{\sqrt{67} + \sqrt{71}} + \frac{\sqrt{67} + \sqrt{71}}{\sqrt{73} + \sqrt{79}} + \frac{\sqrt{73} + \sqrt{79}}{\sqrt{83} + \sqrt{89}} + \frac{\sqrt{83} + \sqrt{89}}{\sqrt{97} + \sqrt{101}} + \frac{\sqrt{97} + \sqrt{101}}{\sqrt{103} + \sqrt{107}} + \frac{\sqrt{103} + \sqrt{107}}{\sqrt{109} + \sqrt{113}} + \frac{\sqrt{109} + \sqrt{113}}{\sqrt{127} + \sqrt{131}} + \frac{\sqrt{127} + \sqrt{131}}{\sqrt{137} + \sqrt{149}} + \frac{\sqrt{137} + \sqrt{149}}{\sqrt{151} + \sqrt{157}} + \frac{\sqrt{151} + \sqrt{157}}{\sqrt{163} + \sqrt{167}} + \frac{\sqrt{163} + \sqrt{167}}{\sqrt{173} + \sqrt{179}} + \frac{\sqrt{173} + \sqrt{179}}{\sqrt{181} + \sqrt{187}} + \frac{\sqrt{181} + \sqrt{187}}{\sqrt{191} + \sqrt{193}} + \frac{\sqrt{191} + \sqrt{193}}{\sqrt{197} + \sqrt{199}}$$

٥ - ٦

$$\overline{٧٠ - (٥ - ٦)}$$

المعادلات ذات الدرجة الثانية

(١٨٩) تعريف - المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي معادلة محتوية على مجهول واحد وأعظم أس له فيها اثنين

$$\text{مثل } ٥س^٢ + ٣س = ٩٢$$

وإذا وجد المجهول في مقام أو تحت علامة جذر يلزم حذفه من المقام أو إزالة الجذر بالطرق السابقة

ففي المعادلة $\frac{٨}{س} + س = ٦$ يلزم حذف المقام فتسؤول الى $٨ + س^٢ = ٦س$ فهي من الدرجة الثانية

وفي المعادلة $\sqrt{٧س} + ٣س = ١٤$ يلزم إزالة الجذر فتؤول الى $٩س^٢ - ٨٥س = ١٩٦$ وهي من الدرجة الثانية أيضا ولا يحكم على درجة المعادلة الا اذا كانت صحيحة وجذرية بالنسبة لمجهولها

(١٩٠) الصورة العمومية لمعادلة الدرجة الثانية - كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهول واحد يمكن أن تبذل الى هذه الصورة $س^٢ + دس + هـ = ٠$

لأنه يمكن اختصار الحدود المشتملة على س الى حد واحد وكذا

الحدود المشتبهة على سر ثم اعتبار الكمية المعلومة كحد واحد
وحينئذ فكل من الكميات $ح$ $د$ $هـ$ $و$ $ز$ $حـ$ $دـ$ $هــ$ $وـ$ $زـ$ الداخلة في المعادلة
العمومية السابقة اما أن يكون حداً واحداً أو كمية كثيرة الحدود
موجبة أو سالبة وقد يكون بعضها معدوماً

(١٩١) أنواع معادلة الدرجة الثانية - معادلة الدرجة الثانية
نوعان تامة وغير تامة فالتامة هي المشتبهة على المجهول بدرجة ثانية
وبدرجة أولى وعلى كمية معلومة
مثل $ح$ سر ٢ + $د$ سر ١ + $هـ$ = $و$

وغير التامة هي اما أن تشمل على المجهول بدرجة ثانية وعلى
كمية معلومة فقط واما أن تشمل على المجهول بدرجة ثانية
وبدرجة أولى كذلك

مثل سر ٢ - $هـ$ = $و$ ٦ سر - $د$ سر = $و$

حل معادلات الدرجة الثانية غير التامة

(١٩٢) أولاً لحل المعادلة

سر ٢ + $هـ$ = $و$ نحول $هـ$ الى الطرف الثاني ثم نأخذ جذر
الطرفين فيصير سر ٢ + $هـ$ = $و$ أي أن للمعادلة جذرين
فإذا كان $هـ$ سالبا يكون - $هـ$ موجبا ويكون الجذران حقيقيين
وإذا كان $هـ$ موجبا يكون - $هـ$ سالبا ويكون الجذران
تخيليين

مثلا في المعادلة ٣ سره - ٧٥ = ٠

يكون سره = $\pm \sqrt{20}$ أي أن للجهول سره مقدارين حقيقيين فاذا ارمز لهما بحرفي سره ٦ سره ينتج سره = ٥ سره ٦ = - ٥ وكل منهما يحقق المعادلة

وفي المعادلة ٣ سره + ٧٥ = ٠ يكون سره = $\pm \sqrt{20}$

= $\pm \sqrt{20}$ أي أن للجهول مقدارين تخيليين (١٩٣) ثانيا لحل المعادلة سره - ٥ سره = ٠ نأخذ سره مضروبا مشتركا فيحدث سره (سره - ٥) = ٠ وحيث ان حاصل ضرب سره في (سره - ٥) يساوى صفرا فيلزم أن يكون أحد العاملين أو كلاهما صفرا فاذا فرض أن سره = ٠ يرى أن مقدار سره هو صفرو به تتحقق المعادلة واذا فرض أن سره - ٥ = ٠ فيكون سره = ٥ وهو أيضا يحقق المعادلة وحينئذ فيكون للمعادلة جذران فاذا ارمز لهما بحرفي سره ٦ سره ينتج سره = ٠ سره ٦ = ٥

مثلا في المعادلة ٣ سره - ١٥ = ٠ يكون

سره (٣ سره - ١٥) = ٠ ومنها يكون سره = ٠ سره ٦ = ٥

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

$$(٢٤٢) \quad ٤ سره - ٦٠ = ٠ \quad (٢٤٣) \quad ٥ سره - ٦٣ = ٠ \quad ٢ سره$$

$$(٢٤٤) \quad ٨١ - ٤ سره = ٧ \quad (٢٤٥) \quad ٧ (سره - ١) = ١٦٨$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1-s}{7-s^2} &= \frac{1+s}{1+s^2} (247) & \frac{s}{4} &= \frac{1+s^2}{1+s} (246) \\
 . &= s^2 (248) & . &= (1-s) s^2 (249) \\
 \frac{s}{4} &= \frac{s^2}{11} (250) & 2 &= \frac{s^2}{3} (251) \\
 (252) & \quad s = \left(\frac{s}{4} + s \right) s & & \\
 (253) & \quad 7 = s - \left(\frac{s}{4} + s \right) s & & \\
 . &= 7 (254) & 7 &= (s+s^2) s (255) \\
 \frac{s}{7} &= \frac{s}{s+s^2} (256) & \frac{s}{7} &= \frac{s}{s+s^2} (257) \\
 (258) & \quad s = (s-s^2) s & . &= (s-1) s (259) \\
 \frac{s}{7} &= -s
 \end{aligned}$$

مسائل محلولة على معادلات الدرجة

الثانية غير التامة

(١٩٤) المسئلة الاولى - ما هو العدد الذى اذا طرح خمسة من خمس مربعه ينتج ٤٠
الحل نفرض العدد s وعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المعادلة

$$\begin{aligned}
 \frac{s^2}{5} - 5 &= 40 \quad \text{وبجملها يوجد} \\
 s^2 &= 50 \pm \quad \text{والتحقيق واضح}
 \end{aligned}$$

(١٩٥) المسئلة الثانية رجل عمره خمسة أمثال عمر ابنه ومجموع مربعى عمرهما ١٢٧٤ فما عمر كل منهما
الحل نفرض أن عمر الابن s فيكون عمر الاب $5s$ وعلى حسب منطوق المسئلة توجد المعادلة

$$س^٢ + ٢٥ س^٢ = ١٢٧٤ \text{ ويجعلها يحدث}$$

$$س = ٧ \pm$$

أعني أن عمر الابن ٧ سنوات ويكون عمر الأب ٣٥ سنة
أما المقدار السالب فلا يوافق المسئلة

(١٩٦) المسئلة الثالثة - ما هو العدد الذي اذا ضرب ثلثه

في خمسة أثمانه كان الناتج مساويا لعشرة أمثاله

الحل نفرض أن العدد س فيكون ثلثه $\frac{س}{٣}$ ونجسبه أثمانه $\frac{٨س}{٨}$ وعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$$\frac{س}{٣} \times \frac{٨س}{٨} = ١٠ س \text{ أو}$$

$$٥ س^٢ = ٢٤٠ س \text{ أو}$$

$$س^٢ = ٤٨ س \text{ أى}$$

س^٢ - ٤٨ س = ٠ . وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = ٠ \text{ أو } ٤٨$$

(١٩٧) المسئلة الرابعة - ما هو العدد الذي نسبة مربعه

الى ٦ كنسبته الى نصف

الحل نفرض أن العدد س فعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$$\frac{س^٢}{٦} = \frac{س}{٢} \text{ ومنها يكون } س^٢ = ١٢ س \text{ أى}$$

س^٢ - ١٢ س = ٠ . وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = ٠ \text{ أو } ١٢ \text{ أعني أن العدد المطلوب هو } ١٢$$

مسائل على معادلات الدرجة الثانية غير التامة يطلب حلها

(٢٦٠) ما هو العدد الذى اذا ضرب ثلثه فى ربعه ينتج ١٠٨

(٢٦١) ما هو العدد الذى نسبته الى ١٨ كنسبة الواحد الى نصف ذلك العدد

(٢٦٢) قطعة أرض مربعة الشكل اذا أضيف لها ١٧٩ مترا مربعا تصير قدانا فما ضلعها بالتر

(٢٦٣) ما هو العدد الذى اذا أضيف عشرة الى مربعه ينتج واحد

(٢٦٤) قطعة من الحرير ثمنها $\frac{1}{3}$ — وثمن المتر منها يعادل خمس عدد الامتار الدالة على طولها فما ثمن المتر وما مقدار طولها

(٢٦٥) ما هو العدد الذى نسبة مربعه الى ثمانية كنسبة ثلاثة أمثاله الى اثنين

(٢٦٦) ما مقدار طول ضلع الزاوية القائمة فى مثلث قائم الزاوية بعد معرفة أن الضلع الثانى ينقص عن هذا الضلع مترا واحدا وأن الوتر يزيد عنه مترا واحدا

(٢٦٧) سئل شخص عن مقدار سنه فقال انه اذا ضرب ثلثى عمره فى خمسه كان الناتج مساويا لاربعة أمثاله فما مقدار سنه

(٢٦٨) ما هو العدد الذى ثلاثة أمثاله مربعه يساوى تسعة أمثاله

(٢٦٩) ماهو العدد الذي اذا ضرب في المرق بينه وبين ١٢ كان الناتج مساويا لثلاث مربعه

حل المعادلة ذات الدرجة الثانية التامة

(١٩٨) للمعادلة التامة ذات الدرجة الثانية صورتان الاولى أن يكون مكررا مجهول بدرجة ثانية الواحد الثانية أن يكون مكرره غير الواحد

(١٩٩) الصورة الاولى

س^٢ + د س - ه = ٠ ولحلها نقول ه الى الطرف الثاني فينتج

$$س^٢ + د س = ه$$

وبالتامل للطرف الاول نجد أنه مشتمل على حدين من مربع كمية ذات حدين فيه س^٢ مربع الحد الاول و د س ضعف الاول في الثاني فاذا يكون الثاني $\frac{د}{٢}$ فاذا أضيف للطرفين مربعه أي $\frac{د^٢}{٤}$ ينتج

$$س^٢ + د س + \frac{د^٢}{٤} = \frac{د^٢}{٤} + ه$$

و يكون الطرف الاول مربع الكمية س + $\frac{د}{٢}$ فاذا استعبط بها ينتج

$$(س + \frac{د}{٢})^٢ = \frac{د^٢}{٤} + ه$$

$$س + \frac{د}{٢} = \sqrt{\frac{د^٢}{٤} + ه} \text{ أو } س = \sqrt{\frac{د^٢}{٤} + ه} - \frac{د}{٢}$$

$$(١) س = \sqrt{\frac{د^٢}{٤} + ه} - \frac{د}{٢}$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية في الحالة التي يكون مكرره الواحد وينطبق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية (في الحالة التي يكون مكرره فيها الواحد) يساوي نصف مكرر المجهول بدرجة أولى بعد تغير اشارته زائدا أو ناقصا الجذر التربيعي للكمية الناتجة من مربع هذا النصف مضافا اليه الكمية المعروفة بعد تغير اشارتها .

وحيث ان الجذر في قانون (١) اشارتين فيكون للمجهول من مقداران فإذا رمز لهما بحرفي x و y يكون

$$x = \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{5}{4} = 6 \quad y = \sqrt{\frac{13}{4}} + \frac{5}{4} = 6$$

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$x^2 + 3x - 28 = 0 \text{ . يتبع أن}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} \text{ أي}$$

$$x = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

وإذا رمز لمقداري المجهول بحرفي x و y ينتج

$$x = -3 + 11 = 8 \quad y = -3 - 11 = -14$$

$$x = -3 - 11 = -14 \quad y = -3 + 11 = 8$$

(٣٠) الصورة الثانية

$x^2 + 5x + 6 = 0$ ولحلها نقسم حدودها على ٦ فيحدث

س٢ + س + ه = ٠ . وبتطبيق القانون السابق على هذه
المعادلة ينتج

$$\text{س٢} = -\frac{س}{س٢} \pm \sqrt{\frac{س}{س} - \frac{٢٥}{١٥٤}} \quad \text{وبإجراء عملية الطرح}$$

فمما تحت الجذر ينتج

$$\text{س٢} = -\frac{س}{س} \pm \sqrt{\frac{س - ٢٥}{١٥٤}} \quad \text{وبإخراج المقام من تحت}$$

علامة الجذر ينتج

$$(٢) \quad \frac{-\frac{س}{س} \pm \sqrt{\frac{س - ٢٥}{١٥٤}}}{١} = \text{س٢}$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية في حالة
ما إذا كان مكرره غير الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية (في الحالة التي يكون مكرره فيها
غير الواحد) يساوى كسرا اعتماديا بسطه مكرر المجهول بدرجة
أولى بعد تغيير اشارته زائدا أو ناقصا الجذر التربيعي للكمية الناتجة
من مربع هذا المكرر مضافا اليه أربعة أمثال حاصل ضرب
مكرر المجهول بدرجة ثانية في الكمية المعروفة بعد تغيير اشارتها
ومقامه ضعف مكرر المجهول بدرجة ثانية .

ويتطبق هذا القانون على حل المعادلة

$$٥ \text{ س٢} + ٣ \text{ س} - ٩٢ = ٠ \quad \text{ينتج}$$

$$\text{س٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٩ \times ٥ \times ٩٢}}{٥ \times ٢} \quad \text{أي}$$

$\text{سم} = \frac{43 \pm 3}{10}$ واذن من المقدار المجهول بحرفي
 منه ٦ سم ينتج سم $= \frac{4}{10} = 4 \text{ سم}$ $= \frac{47}{10} = 4.7$
 (١٠٢) حالة خصوصية - اذا كان مكرر المجهول بدرجة أولى
 زوجيا كما في المعادلة $\text{سم} + 2 \text{ سم} + 3 \text{ سم} = 0$
 التي فيها ٢ و ٣ بدلا عن ١ في السابقة فانه يمكن اختصار القانون
 السابق اذ تطبيقه على هذه المعادلة ينتج أن

$$\text{سم} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$

وبأخذ ٤ وضربا مشتركا فيما تحت الجذر واخراجه ينتج

$$\text{سم} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$

وبقسمة حدى الكسر على ٢ ينتج

$$\text{سم} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} \quad (٢)$$

وهو قانون لمعادلة الدرجة الثانية في هذه الحالة المخصوصة
 وعلى الطالب أن ينطبق به هذا القانون قياسا على القانونين
 السابقين لترينه على التعبير اللفظي عن القوانين الجبرية
 وبتطبيق هذا القانون على المعادلة $3 \text{ سم} - 4 \text{ سم} - 10 = 0$
 ينتج

$$\text{أو } \frac{10 \times 3 + 4 \sqrt{7} \pm 2}{3} = \text{سـ}$$

$$\text{ومنـ } \frac{49 \sqrt{7} \pm 2}{3} = \text{سـ}$$

$$\text{سـ} = \frac{7+2}{3} = 3 \text{ سـ} = \frac{7-2}{3} = 1 \frac{2}{3}$$

(٣٠٣) تنبيه يمكن أن يكتب في الصورة الثانية (٢٠٠)

(٢٠١) بقسمة حدود المعادلة على مكرر المجهول بدرجة ثانية

وتطبيق القانون الاول السابق بنمرة ١٩٩

مثلا لحل المعادلة

$$0 \text{ سـ}^2 + 3 \text{ سـ} - 92 = 0 \text{ . نقسم حدودها على}$$

٠ فننتج

$$\text{سـ}^2 + 0.6 \text{ سـ} - 18.4 = 0 \text{ . وبطبيق قانون (١) عليها}$$

ننتج

$$\text{سـ} = \frac{-0.3 \pm \sqrt{0.3^2 + 18.4}}{1} \text{ ومن هنا يؤخذ أن}$$

$$\text{سـ} = 4 \text{ سـ} = 6 \text{ سـ} = -4.6 \text{ وهو عين ما تقدم بنمرة ٢٠٠}$$

$$\text{ولحل المعادلة } 3 \text{ سـ}^2 - 4 \text{ سـ} - 10 = 0 \text{ . نقسم حدودها}$$

على ٣ فننتج

$$\text{سـ}^2 - \frac{4}{3} \text{ سـ} - \frac{10}{3} = 0 \text{ . وبطبيق قانون (١) عليها ينتج}$$

$$\text{سـ} = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{40}{3}}}{1} \text{ ومن هنا يؤخذ أن}$$

$$\text{سـ} = 3 \text{ سـ} = 6 \text{ سـ} = 1 \frac{2}{3} \text{ وهو عين ما تقدم بنمرة ٢٠١}$$

ويستنتج من هذا أنه يمكن اعتبار الصورة الاولى لمعادلة الدرجة الثانية التامة صورة عومسية وهي الصورة المعتادة والاكثر استعمالا

(٣٠٣) تنبيه يلاحظ عند تطبيق القوانين السابقة على معادلات الدرجة الثانية أن تكون اشارة المجهول بدرجة ثانية موجبة فان كانت سالبة لزم تغيير جميع اشارات للمعادلة

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

$$(٢٧٠) \text{ مه}^2 - ١٠ \text{ مه} + ٩ = ٠ \quad (٢٧١) \text{ مه}^2 - ٩ \text{ مه} + ١٤ = ٠$$

$$(٢٧٢) \text{ مه}^2 - ١١ \text{ مه} + ٢٤ = ٠ \quad (٢٧٣) \text{ مه}^2 - ١٠ \text{ مه} + ٢٤ = ٠$$

$$(٢٧٤) \text{ مه}^2 - \text{مه} - ٢٠ = ٠ \quad (٢٧٥) \text{ مه}^2 + ٦ \text{ مه} - ٧٢ = ٠$$

$$(٢٧٦) \text{ مه}^2 + ٢ \text{ مه} - ٣٥ = ٠ \quad (٢٧٧) \text{ مه}^2 + ٧ \text{ مه} - ٨ = ٠$$

$$(٢٧٨) \text{ مه}^2 + ١٢ \text{ مه} + ٢٧ = ٠ \quad (٢٧٩) \text{ مه}^2 + ١٢ \text{ مه} + ٢٠ = ٠$$

$$(٢٨٠) \text{ مه}^2 - ٥ \text{ مه} - ٢ = ٠ \quad (٢٨١) \text{ مه}^2 + ٣ \text{ مه} - ٥٤ = ٠$$

$$(٢٨٢) \text{ مه}^2 - ١٧ \text{ مه} - ١١٥ = ٠ \quad (٢٨٣) \text{ مه}^2 - \text{مه} - ٩ = ٠$$

$$(٢٨٤) \text{ مه}^2 + ٥ \text{ مه} - ١٤ = ٠ \quad (٢٨٥) \text{ مه}^2 + ١١ \text{ مه} + ٤٨ = ٠$$

$$(٢٨٦) \text{ مه}^2 - ٤ \text{ مه} - ٥١ = ٠ \quad (٢٨٧) \text{ مه}^2 + ٦ \text{ مه} - ١٠٤ = ٠$$

$$. = ٢٨٨ (٢٨٨) ٣ \text{ سر} - ١٨ \text{ سر} + ١٥ = ٩ (٢٨٩) ١ \text{ سر} + ١٠ \text{ سر} + ٢٨٤ = .$$

$$. = ٢٩٠ (٢٩٠) ٣ \text{ سر} - ١ \text{ سر} + ١ = ٢ (٢٩١) ٢ \text{ سر} - ١ \text{ سر} - ٢٥ = .$$

$$. = ٢٩٢ (٢٩٢) ٣ \text{ سر} = ٧ + ١ \text{ سر} = ٢ (٢٩٢) ٣ \text{ سر} = ١ - ١ \text{ سر} + ١ \text{ سر}$$

$$. = ٢٩٤ (٢٩٤) ٣ \text{ سر} = ٨ - ١ \text{ سر} = ٢ (٢٩٥) ٣ \text{ سر} = ١ - ١ \text{ سر} + ١ \text{ سر}$$

$$. = ٢٩٦ (٢٩٦) ٣ \text{ سر} = ٤ - ١ \text{ سر} = ٢ (٢٩٧) ٣ \text{ سر} = ١ - ١ \text{ سر} + ١ \text{ سر}$$

$$. = ٢٩٨ (٢٩٨) ٣ \text{ سر} = ٢ + ١ \text{ سر} = ٢ (٢٩٩) ٣ \text{ سر} = ١ - ١ \text{ سر} + ١ \text{ سر}$$

$$. = ٣٠٠ (٣٠٠) ٣ \text{ سر} = ٣ + ١ \text{ سر} = ٢ (٣٠١) ٣ \text{ سر} = ١ - ١ \text{ سر} + ١ \text{ سر}$$

مسائل محلولة تطبيقاً على معادلات الدرجة

الثانية التامة

(٢٠٤) المسئلة الاولى - سمسار اشترى أطيانا بمبلغ ١٨٧٥ جنيهه

منها ١٥ فداناً وباع الباقي بمبلغ ١٧٤٠ جنيهه رابحاً ٤ جنيهات

في كل فدان باعه فكم فداناً اشترى

الحل نرمز لعدد الافدنة التي اشتراها بحرف سر فيكون ماباعه

سر - ١٥ ويكون ثمن الفدان في حالة الشراء هو ١٨٧٥ / سر

الفدان في حالة البيع ١٧٤٠ / سر - ١٥ وحيث انه ربح ٤ جنيهات في

الفدان تحدث المعادلة

$$\frac{١٧٤٠}{١٥ - \text{سر}} = ٤ + \frac{١٨٧٥}{\text{سر}}$$

$$\frac{١٧٤٠ + ٧٥ - ١٨٧٥}{٨} = \text{سر}$$

ومن هنا يؤخذ أن $س = ٧٥$ و $٦ س = ٩٣,٧٥$ —
وبالنظر للمقدار الاول يعلم أن عدد الافدة التي اشتراها ٧٥
فدانا ويكون ثمن الفدان ٢٥ جنبها وأما المقدار الثاني فلا
يوافق المسئلة

(٣٠٥) المسئلة الثانية شخص استرى بجلة ياردات من الحرير
بمبلغ ٥ جنبها انجليزيه ولو أخذ بهذا المبلغ عينه من حرير
آخر ينقص ثمن البادر منه شلنا لاخذ خمس ياردات زيادة عما
اشترى فاعدد الباردات التي اشتراها

الحل نرمز لعدد الياردات التي اشتراها بحرف س فيكون ثمن
اليارده $\frac{١}{٢٥} س$ شلنا وحيث انه لو أخذ من حرير آخر عن اليارده منه
أقل من الاول بشلن يأخذ خمس ياردات زيادة فيكون ثمن البادره
من الحرير الثاني $\frac{١}{٢٥} س$ وحيث ان ثمن اليارده في هذه الحالة
ينقص شلنا واحد عما اشترى فتحدث المعادلة

$$\frac{١}{٢٥} س + ١ = \frac{١}{٢٥} س$$

$$س = ٢٥ \pm ٢٢,٥ \text{ ومن هنا يؤخذ أن}$$

$$س = ٢٥ \text{ و } ٦ س = ٩٣,٧٥$$

أعني أن عدد الياردات التي اشتراها هو ٢٥ يارده أما المقدار
الثاني فلا يوافق المسئلة

(٣٠٦) المسئلة الثالثة صانعان اشتغلا باجرة يومية مختلفة
أخذ الاول $\frac{١}{٣٨٤}$ وأخذ الثاني $\frac{١}{٣٨٤}$ وكانت أيام شغل الثاني أقل
من أيام شغل الاول بستة أيام ولكن لاشتغل الثاني بقدر أيام الاول

واشغل الاول بقدر أيام الثاني لاختذا أجرتين متساويتين فاعدد أيام شغل كل منهما وكم أجرته اليومية

الحل نفرض أن أيام الاول سه فتكون أيام الثاني سه - ٦

وتكون الاجرة اليومية للاول $\frac{٣٨٤}{سه}$ والاجرة اليومية للثاني $\frac{٢١٦}{سه-٦}$

واذا اشتغل الاول بقدر أيام الثاني تكون أجرته في هذه الايام

$\frac{٣٨٤}{سه} (سه - ٦)$ واذا اشتغل الثاني بقدر أيام الاول تكون

أجرته في هذه الايام $\frac{٢١٦}{سه-٦}$ سه وحيث ان في هذه الحالة تكون

الاجرتان متساويتين فحدث المعادلة

$$\frac{٣٨٤(سه-٦)}{سه} = \frac{٢١٦}{سه-٦} \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$\frac{١٩٢}{١٤} = سه$$

ومن هنا يؤخذ أن سه = ٢٤ ٦ سه = $\frac{٢٤}{٧}$ وبالنظر

للقدار الاول يكون أيام شغل الصانع الاول ٢٤ وأجرته اليومية

$\frac{٣٨٤}{٢٤}$ وأيام شغل الصانع الثاني ١٨ وأجرته اليومية $\frac{٢١٦}{١٨}$ وأما

المقدار الثاني $\frac{٢٤}{٧}$ فلا يوافق المسئلة

(٣٠٧) المسئلة الرابعة اذا سار قطر سكة حديد خمسة كيلو

مترات زيادة عن سرعته الاصلية فانه يقطع ٢١٠ كيلومتر في

زمن أقل بساعة عما اذا سار بسرعته الاصلية فني كم ساعة

يقطع هذه المسافة بالسرعة الاصلية

الحل نرمز لعدد الساعات التي يقطع فيها هذه المسافة بالسرعة

الاصلية بحرف سه فتكون سرعته في الساعة $\frac{١١}{٢٢}$ وتكون
سرعته في الساعة في الحالة الثانية $\frac{١١}{٢٢} + ٥$ وحيث انه يقطع
الطريق في هذه الحالة في مدة أقل من الاولى بساعة واحدة
فيقطعها في (سه - ١) ساعة واذا ضرب ما يقطعه في
الساعة في عدد الساعات يكون الحاصل ذالاعلى طول الطريق
وحيثذ فحدث المعادلة

$$\left(\frac{١١}{٢٢} + ٥ \right) (سه - ١) = ٢١٠ \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$سه = ٥٠ + ٦٥$$

ومن هنا أن سه = ٦٥ و سه = ٦٠ وبالنظر للقدار الاول
يعلم انه يقطع هذه المسافة في ٦ ساعات بالسرعة الاولى وعلى
هذا فيقطعها في ٦ ساعات بالسرعة الثانية وأما المقدار الثاني
فلا يوافق المسئلة

مسائل على الدرجة الثانية يطلب حلها

(٣٠٠) استأجر اخوة عربية بمبلغ ٦٠ مليما وعند الشروع في
الركوب حضر اثنان من أصحابهم فركبوا معهم ووزعت الاجرة
عليهم جميعا وبذلك نقص ما كان يدفعه كل واحد من الاخوة
ثمانية مليمات فكم عدد الاخوة

(٣٠١) رجل يمكنه أن يقطع ١٠٨ أميال في مدة معينة ووجد
أنه يمكنه أن يوفر من تلك المدة ٥ ساعات اذا زاد على سرعة ميلين
في الساعة فما سرعته الاصلية

(٣٠٢) صبي اشترى بيضا بقرش واحد فكسر ٣ بيضات في الطريق وبذلك ارتفع عن كل ست بيضات ملهما واحدا عن ثمن السوق فكم بيضة أخذت بالقرش

(٣٠٣) أراد محسن أن يتصدق بمبلغ $\frac{1}{2}$ على جملة فقراء وبعد تعيين نصيب كل منهم حضر ثلاثة فقراء آخرون فأدخلهم في التقسيم وبهذه الوساطة نقص ما كان خصمه لكل واحد $\frac{1}{4}$ فكم عدد الفقراء الاول

(٣٠٤) ارب محطنا سكة حديد بينهما ٣٠٠ ميل قام في وقت واحد من كل منهما قطار فامدا الاخرى فتقابل القطران وبعد ٤ ساعات من تقابلهما وصل القاتم من ب الى ا وبعد ٩ ساعات من التقابل أيضا وصل القاتم من ا الى ب فما سرعة كل منهما في الساعة

(٣٠٥) بلغت مصاريف قضية بين اشخاص متضامين ١٠٠ جنيه فالزموا بدفع هذا المبلغ ولعسر ثلاثة منهم دفع كل من الباقيين ٧٥٠ جنيه زيادة عما كان يلزم أن يدفعه فما عدد المتضامين

(٣٠٦) شخص وضع ١٥٠٠٠ جنيه في تجارة مدة سنة ثم أخذ ما وضعه وأرباحه ووضع في تجارة أخرى مدة سنة وفد علم أن ربحه في هذه السنة يزيد واحدا في المائة عن ربح السنة الاولى فكم كان ربح المائة في أول سنة

(٣٠٧) حوض يملأ بمحفتين معا في $\frac{1}{2}$ دقيقة والكبرى تملؤ في زمن أقبل من الصغرى بمقدار $\frac{1}{4}$ دقيقة والمطلوب معرفة

لوقت الكافي لملئه بكل واحدة منهما
(٣٠٨) $\frac{6}{7}$ د محطتان بينهما ٢٤٠ ميلا قام قطرا من $\frac{7}{8}$
وبعد ساعة قام قطرب من $\frac{7}{8}$ أيضا وبعد ساعتين وصل الى
نقطة مر عليها ا منذ ٤٥ دقيقة فزبدت سرعته خمسة أميال
في الساعة وبذلك لحق ب القطر ا وقت وصوله محطة د فما
السرعة التي قام بها كل منهما من $\frac{7}{8}$

(٣٠٩) شخص اشترى مقدارا من البرتقال بمبلغ ٢٠٠ مليم
فكف منه ٥٠ برتقاله وباع كل برتقاله من الباقي بثمان يزد عن
ثمانها الاصلى $\frac{3}{8}$ مليم وبذلك ربح ٧٠ مليم فكم عدد البرتقال
الذي اشتراه

(٣١٠) غيط مستطيل الشكل محيطه ٥٠٠ ياردة ومساحته
١٤٤٠٠ ياردة مربعة فما مقدار ضلعه

(٣١١) محيط مربع يزيد عن مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة
الأكبر تزيد عن مساحة الأصغر ٣٢٥ قدما مربعا فما ضلع كل
منهما

(٣١٢) في وسط قطعة أرض مربعة الشكل قصر مربع
الشكل وحول هذا القصر ممشى من الحساء عرضها أربعة أمتار
وحول هذا الممشى زرع عرضه ٦ أمتار فإذا كان مساحة القصر
والزراع ٧٢١ مترا مربعا فما مساحة القصر

(٣١٣) المطلوب إيجاد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بحيث
تكون مقادير أضلاع مثلث قائم الزاوية

(٣١٤) المعلوم مستقيم \propto والمطلوب تقسيمه الى قسمة ذات وسط وطرفين أى الى قسمين أكبرهما يكون وسطا متناسبا بين المستقيم الكلى والجزء الاصغر ثم إيجاد المقدار الرقى للنتائج بفرض \propto يساوى ٣٠ مترا

(٣١٥) المطلوب إيجاد القانون الذى يحسب به نصف قطر احدى قاعدتى مخروط ناقص بعد معرفة حجمه ونصف قطر القاعدة الاخرى والارتفاع

مناقشة المعادلة ذات الدرجة الثانية

(٣٠٨) تقدم بفرقة ٢٠٢ أن معادلات الدرجة الثانية يمكن أن تأخذ صورة عومية واحدة وهى $x^2 + px + q = 0$ التى منها

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

ولمناقشة هذا القانون يقال انه يمكن أن يعبر فيه ثلاث حالات (الحالة الاولى) اذا كانت الكمية التى تحت علامة الجذر وهى $\frac{p^2}{4} - q$ ≥ 0 أى موجبة يكون الجذران حقيقيين ومختلفين المقدار ويدخل تحت ذلك ثلاث صور الصورة الاولى اذا كان $\frac{p^2}{4} - q < 0$ أى موجبة تكون تحت الجذر سالبة ويكون

$\frac{p^2}{4} - q > 0$ ومنه $\frac{p^2}{4} - q > 0$ ويكون مقدارا x فى هذه الحالة بعلامة $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ يعنى يكون له

مقداران مختلفان بعلامة واحدة مخالفا لعلامة ϵ في المعادلة
الصورة الثانية اذا كان $\epsilon = 0$. يكون

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

ويكون مقدارا ϵ هما $-\frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon}$ ومنه يكون $\epsilon = 0$.
 $\epsilon = 0$.

يعنى أن للجهول مقداران أحدهما صفر والثاني يساوى مكرر
 ϵ بعلامة مخالفة لعلامته

الصورة الثالثة اذا كان $\epsilon > 0$. أى سالبة تكون تحت الجذر
موجبة ويكون

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} < \frac{\epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{\epsilon} \text{ ومنه } \frac{\epsilon}{\epsilon} < \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

ويكون مقدارا ϵ في هذه الصورة بعلامة الجذر يعنى يكون
له مقداران مختلفان بعلامتين مختلفتين وزيادة على ذلك فان
أكبرهما في القيمة المطلقة تكون علامته مخالفة لعلامة ϵ في
المعادلة

(الحالة الثانية) اذا كانت القيمة التى تحت الجذر وهى $\frac{\epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{\epsilon}$

$= 0$. أى معدومة يكون الجذران حقيقيين ومتساويين يعنى ان
يعنى ماتحت علامة الجذر ويكون $\epsilon = -\frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon}$. ومنه

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

ومن ذلك يلاحظ أنه كلما كان الجذور $\frac{\epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{\epsilon} < 0$. أى غير
معدوم كان الجذران مختلفين عن بعضهما وهما يميلان الى نهاية

واحدة متى مال $\frac{1}{2}$ — ح الى الصفر وهذه النهاية هي — $\frac{5}{4}$
 (الحالة الثالثة) اذا كان المجذور $\frac{1}{4}$ — ح > ٠ أى سالبا
 يكون الجذران تخيليين لانه لما كان المقدار الذى تحت الجذر
 سالبا فلا يمكن استخراجه ولهذا يكون الجذران تخيليين
 الارتباط بين جذرى معادلة الدرجة

الثانية ومكرراتها

(٢٠٩) تقدم أن كل معادلة ذات درجة ثانية يمكن أن
 توضع على هذه الصورة

$$س^٢ + س + ه = ٠$$

وأنة اذا رمز لمقدار المجهول بحرفى س' و س'' يكون

$$س' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - ه}$$

$$س'' = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - ه}$$

فاولا اذا جمع هذان المقداران على بعضهما ينتج

$$س' + س'' = -١$$

أعنى أن مجموع جذرى معادلة الدرجة الثانية يساوى مكرر
 المجهول بدرجة أولى مع تغير اشارته

وثانيا اذا ضرب المقداران السابقان فى بعضهما ينتج

$$س' س'' = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - ه}\right) \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - ه}\right)$$

وحيث ان الطرف الثانى هو عبارة عن حاصل ضرب مجموع
كيتين في تفاضلهما فيساوى الفرق بين مربعيهما أعنى يكون
سه سه = $\frac{٢}{٤} - (\frac{٢}{٤} - هـ) = هـ$

أعنى أن حاصل ضرب جزئى المعادلة يساوى الكمية المعلومة
(٢١٠) تنبيهه اذا كانت معادلة الدرجة الثانية بالصورة
ح سه + د سه + هـ = . فيسهل أن يرى مباشرة أن
مجموع الجذرين = $\frac{٢}{٤} - ٦$ حاصل ضربيهما = $\frac{٢}{٤}$

(٢١١) نتيجة أولى يمكن بواسطة ما تقدم معرفة اشارة جذرى
معادلة الدرجة الثانية قبل حلها ولذلك يقال حيث ان سه ×
سه = هـ و سه + سه = - د فاذا كان هـ موجبا علم
أن اشارتى المضروبين سه و سه من نوع واحد ونوع الاشارتين
يخالف اشارة د لان مجموعهما يخالف تلك الاشارة
وأما اذا كان هـ سالبا فتكون الاشارتان مختلفتين وتكون اشارة
أكبرهما في المقدار المطلق مخالفة لاشارة د
مثال (١) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

$$سه^٢ - ٧ سه + ١٠ = ٠$$

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى ١٠ وهو موجب
فيكونان متحدى الاشارة وحيث أن مجموعهما يساوى ٧ فيكونان
موجبين

مثال (٢) لمعرفة جذرى المعادلة سه^٢ + ٥ سه - ٢٤ = ٠
يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى - ٢٤ وهو

سالب فيكونان مختلفي الإشارة وحيثان مجموعهما يساوى ٥
 فيكون المقدار المطلق لأكبرهما سالبا وقس على هذا
 (٢١٣) نتيجة ثانية يمكن بواسطة ما تقدم تكوين معادلة
 الدرجة الثانية بعد معرفة جذريها

مثال أول اذا كان جذرا معادلة هما $س = ٥$ $س = ٦$ $٨ = ٥ + ٦$
 يكون $س = ٥ + ٦ = ٨$ $١٣ = ٥ + ٦$ $٥ = ٦$
 $٨ \times ٥ = ٤٠$ وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى
 هو $١٣ -$ والكمية المعلومة هي ٤٠ وتكون المعادلة هي

$$س^٢ - ١٣س + ٤٠ = ٠$$

مثال ثان اذا كان $س = ٥$ $س = ٦$ $٣ = ٥ - ٦$
 يكون

$$س^٢ - ١٣س + ٤٠ = ٠$$

وحيثئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى $٦ -$ والكمية المعلومة
 ٤ وتكون المعادلة

$$س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$$

مثال ثالث - اذا كان $س = ٥$ $س = ٦$ $٣ = ٥ - ٦$
 يكون

$$س^٢ - ١٣س + ٤٠ = ٠$$

$$\overline{(1 - \sqrt{3} - 5)} (\overline{1 - \sqrt{3} + 5}) = \text{سم}^2 = 20 + 9 = 29$$

ويكون مكرر المجهول بدرجة أولى — ١٠ والقيمة المعلومة ٢٩ وتكون المعادلة

$$\text{سم}^2 - 10 = 29 + 0$$

(٣١٣) نتيجة ثالثة — اذا علم مجموع عددين وحاصل ضربهما يمكن أن توضع معادلة ذات درجة ثانية يكون جذراها العددين المذكورين

مثلاً اذا كان مجموع عددين ١٦ وحاصل ضربهما ٦٣ فيكون العددين المطلوبان هما جذرا معادلة ذات درجة ثانية فيها مكرر المجهول بدرجة أولى — ١٦ والقيمة المعلومة ٦٣ وحينئذ توضع المعادلة

$$\text{سم}^2 - 16 = 63 + 0 \text{ وبحلها يوجد}$$

$$\text{سم}^2 = 8 \pm \sqrt{64 - 63} \text{ أى}$$

$$\text{سم}^2 = 9 \text{ سم}^2 = 7$$

أى أن العددين المطلوبين هما ٩ و ٧

تمارين

بين علامتى جذرى كل واحدة من المعادلات الآتية بدون حلها

$$(316) \text{ سم}^2 - 6 = 5 + 0 \text{ سم}^2 + 3 = 10 + 0$$

$$(318) \text{ سم}^2 - 8 = 16 + 0 \text{ سم}^2 + 8 = 40 + 0$$

(٣٢٠) $٦س^٢ - ١٤س + ٦ = ٠$ (٣٢١) $٣س^٢ - ٤س - ٤ = ٠$
 (٣٢٢) $٩س^٢ - ١٢س + ٤ = ٠$ (٣٢٣) $٢س^٢ - ٥س + ٧ = ٠$
 المطلوب تكوين معادلات الدرجة الثانية التي جذورها الكميات
 الآتية

$$(٣٢٤) \quad ٣٦٢ \quad (٣٢٥) \quad ٧٦٤$$

$$(٣٢٦) \quad ٣ - ٦٠٥ \quad (٣٢٧) \quad ٧ - ٦٣$$

$$(٣٢٨) \quad ٢٧ - ٥٦٢٧ + ٥ (٣٢٩) \quad ٣٧ - ٢٦٣٧ + ٢$$

$$(٣٣٠) \quad ١ - ٧ - ٢٦١ - ٧ + ٢$$

$$(٣٣١) \quad ١ - ٧٢ - ١ - ٦١ - ٧٢ + ١$$

(٣٣٢) ما هما العددين اللذان مجموعهما ١٥ وحاصل ضربهما ٥٤

(٣٣٣) ما هما العددين اللذان مجموعهما ١٩ وحاصل ضربهما ٩٠

(٣٣٤) اقسام ٦٠ الى جزئين بحيث يكون حاصل ضربهما ٨٩٩

(٣٣٥) ما هو العدد القاسم الى ٣٦ بحيث يكون مجموع القسوم عليه والتجارج ١٥

(٣٣٦) ما بعدا المستطيل الذي محيطه ٢٨ قدما ومساحته ٤٥ قدما مربعا

المعادلات المضاعفة التربع

(٣١٤) تعريف - المعادلة المضاعفة التربع هي معادلة

ذات درجة رابعة لا تحتوي على المجهول بأس فردى

مثل المعادلة $س^٤ + س^٢ + ه = ٠$.

(٢١٥) حل المعادلة المضاعفة التربع - حل المعادلة

$$س^٤ + س^٢ + ه = ٠.$$

نفرض أن $س^٢ = ص$ فيكون $س^٤ = ص^٢$ وتؤول المعادلة إلى

$$ص^٢ + ص + ه = ٠ \quad \text{وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$ص = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ه}}{٢} \quad (١)$$

وحيث أن $ص = س^٢$ فبوضعه بدله يحدث

$$س^٢ = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ه}}{٢} \quad \text{وبأخذ جذر الطرفين يحدث}$$

$$س = \pm \sqrt{\frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ه}}{٢}}$$

وهذا هو القانون العام للمعادلة المضاعفة التربع ومنه يؤخذ

أن المجهول $س$ أربعة مقادير فإذا رمز لها بالحروف $س^١, س^٢, س^٣, س^٤$

ففيكون

$$س^١ = \sqrt{\frac{-١ + \sqrt{١ - ٤ه}}{٢}} \quad س^٢ = \sqrt{\frac{-١ - \sqrt{١ - ٤ه}}{٢}} \quad س^٣ = -س^١ \quad س^٤ = -س^٢$$

$$س^١ = \sqrt{\frac{-١ + \sqrt{١ - ٤ه}}{٢}} \quad س^٢ = \sqrt{\frac{-١ - \sqrt{١ - ٤ه}}{٢}} \quad س^٣ = -س^١ \quad س^٤ = -س^٢$$

مثال - حل المعادلة $س^٤ - ٥س^٢ + ٤ = ٠$

نستعمل القانون السابق فيحدث

$$س^٢ = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤}}{٢} \quad \text{ومنه يكون}$$

$$س^١ = \sqrt{\frac{٥ + ٢}{٢}} = \sqrt{\frac{٧}{٢}} \quad س^٢ = \sqrt{\frac{٥ - ٢}{٢}} = \sqrt{\frac{٣}{٢}} \quad س^٣ = -س^١ \quad س^٤ = -س^٢$$

وكل منها يحقق المعادلة
 (٣١٦) تنبيه - اذا كان جذر المعادلة (١) حقيقيين وإيجابيين
 تكون هذه المقادير كلها حقيقية واذا كان أحد جذري
 المعادلة المذكورة إيجابيا والآخر سلبيا يكون اثنان من هذه
 المقادير حقيقيين واثنان تخيليين واذا كانا سلبين تكون هذه
 المقادير كلها تخيلية
 (٣١٧) تنبيه اذا كان للجهول بدرجة رابعة مكرر غير
 الواحد كما في المعادلة

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 = 0$$

فاما أن نقسم جميع حدودها على x ونجري العمل كما في النمرة
 السابقة واما أن نفرض في هذه المعادلة مباشرة أن $x^3 =$
 y ويكون $x^4 = y^2$ ونؤول المعادلة المفروضة الى معادلة
 ذات درجة ثانية بالصورة التي للجهول بدرجة ثانية مكرر غير
 الواحد وتحل كما تقدم بنمرة ٢٠٠

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

$$(٣٣٧) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(٣٣٨) x^4 - 41x^2 + 400 = 0$$

$$(٣٣٩) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(٣٤٠) x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$(٣٤١) x^4 - 35x^2 + 36 = 0$$

$$(٣٤٢) x^4 - 45x^2 + 144 = 0$$

$$(٣٤٣) \text{ سه } ٢ - \text{ سه } ٢ - ٢٣ = ٠$$

$$(٣٤٤) \text{ سه } ٨ + \text{ سه } ٢٠ - ٥٥ = ٠$$

$$(٣٤٥) \text{ سه } ٣ + \text{ سه } ٣ + ٣٦ = ٠$$

$$(٣٤٦) \text{ سه } ٦ - \text{ سه } ٦ + ٧ = ٠$$

(٣٤٧) ابحث عن أساس العدية التي يكتب بها العدد ١٢٥٥١

مبيناً بالوضع ٣٠٤٠٧

معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(٣١٨) معادلة الدرجة الثانية ذات المجهولين يمكن أن

تحتوى على كل منهما بدرجة ثانية وبدرجة أولى وعلى حاصل ضربيهما وعلى كمية معلومة - مثل

$$\text{ا سه } ١ + \text{ب سه } ١ + \text{ح سه } ١ + \text{د سه } ١ + \text{ه سه } ١ + \text{و سه } ١ = ٠$$

وكل من المقادير ا و ب و ح و د و ه و و قد يكون

حدا واحدا أو كمية ذات حدود موجبا أو سالبا وقد يكون بعضها

معدوما

(٣١٩) مجموعة معادلتين بدرجة ثانية - قد تحتوى هذه

المجموعة على معادلة بدرجة ثانية وأخرى بدرجة أولى وقد

تحتوى على معادلتين كل منهما بدرجة ثانية

(٣٢٠) قاعدة - لحل مجموعة معادلتين بمجهولين احدهما

بدرجة ثانية والاخرى بدرجة أولى تتبع طريقة مماثلة لحل

مجموعة معادلتين بدرجة أولى

مثلا لحل المجموعة

$$\text{مر}^2 + ٥ \text{ مر صه} - ٢ \text{ صه}^2 + ٣ \text{ مر} - ٢٢ = ٠ \quad (١)$$

$$\text{مر}^2 + ٧ \text{ مر} = \text{صه} = ١١ \quad (٢)$$

نستخرج مقدار صه من معادلة (٢) فنجد صه = ٧ مر

- ١١ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن صه في معادلة (١) فيجد

$$\text{مر}^2 + ٥ \text{ مر} - ٢ (٧ \text{ مر} - ١١) - ٢٢ = ٠$$

+ ٣ مر - ٢٢ = ٠ ثم نحذف الاقواس ونختصر الحدود المتشابهة فيجد

$$٦٢ \text{ مر}^2 + ٢٥٦ \text{ مر} - ٢٦٤ = ٠ \text{ وبحل هذه المعادلة فيجد}$$

$$\text{مر} = \frac{٤}{٣١} \text{ و } ٦ \text{ مر} = ٢$$

فاذا وضع بدلا عن مر المقدار الاول $\frac{٤}{٣١}$ في معادلة (٢) ينتج

أن صه = $\frac{١٨}{٣١}$ واذا وضع بدلا عن مر المقدار الثاني $\frac{١٨}{٣١}$ في

تلك المعادلة ينتج أن صه = ٣

(٢٢١) حل مجموعات خصوصية بدرجة ثانية ومجهولين -

يمكن حل بعض مجموعات بدرجة ثانية ومجهولين في احوال

خصوصية بطرق تحاليلية كثيرة الاستعمال وأهمها ايجادا مقداري

المجهولين بواسطة تكوين معادلة ذات درجة ثانية من مجموع

كيتين وحاصل ضربهما (واليك بيانها)

(٢٢٢) الحالة الاولى - اذا أريد حل المجموعة

$$صه + صه = ١٠ \quad (١)$$

$$صه صه = ٢٤ \quad (٢)$$

يشاهد مباشرة أن مقدارى صه و صه هما جذرا معادلة
بدرجة ثانية (٢١٣) فاذا رمز لجهولها بحرف ع يحدث

$$ع^٢ - ١٠ع + ٢٤ = ٠ \quad \text{وبحلها نجد}$$

$$ع = ٥ \pm ١$$

ويكون أحد الجذرين هو مقدار صه والآخر مقدار صه أى
صه = ٦ - صه = ٤ أو بالعكس

(٢٢٣) الحالة الثانية - حل المجموعة صه - صه = ٢ (١)

$$صه صه = ٢٤ \quad (٢)$$

نعتبر أن الجهولين هما صه ٦ - صه فيكون مجموعهما صه +
(صه - صه) = ٢ وحاصل ضربهما صه × صه - صه = ٢٤
ويكون صه ٦ - صه هما جذرا المعادلة

$$ع^٢ - ٢ع + ٢٤ = ٠ \quad \text{وبحلها نجد}$$

$$ع = ١ \pm ٥$$

ويكون أحد الجذرين هو مقدار صه والثاني مقدار صه فاما أن
يكون صه = ٦ - صه = ٤ وبناء عليه يكون صه
= ٤ واما أن يكون صه = ٤ - صه = ٦ فيكون
صه = ٦ والتحقيق واضح

(٢٢٤) الحالة الثالثة - لحل المجموعة

$$\text{سه} + \text{صه} = ١٣ \quad (١)$$

$$\text{سه} + \text{صه} = ٥ \quad (٢)$$

نربع طرفي المعادلة الثانية فيحصل

$$\text{سه} + \text{صه} + ٢ \text{ سه صه} = ٢٥ \quad (٣)$$

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) فيحصل

$$٢ \text{ سه صه} = ١٢ \text{ أو سه صه} = ٦ \quad (٤)$$

فاذا كانت مجموعة من معادلتى ٢ و ٤ يشاهد أنه قد علم مجموع
كيتين وحاصل ضربهما فيكون مقدارا سه و صه هما جذرا
المعادلة

$$\text{ع} - ٥ = ٦ + ٥ \quad (٥) \text{ وبحلها يحصل}$$

$$\text{ع} = ٢٥ \pm ٥$$

ويكون أحد الجذرين مقداره سه والآخ مقدار سه أى سه = ٣

$$\text{سه} = ٢ \text{ أو بالعكس}$$

(٢٢٥) الحالة الرابعة - لحل المجموعة سه + صه = ١٣ (١)

$$\text{سه} - \text{صه} = ١ \quad (٢)$$

نربع طرفي المعادلة (٢) فينتج سه + صه = ٢ سه صه = ١ (٣)

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) فينتج

$$٢ \text{ سه صه} = ١٢ \text{ أو سه صه} = ٦ \quad (٤)$$

فاذا كانت مجموعة من معادلتى (١) و (٤) واعتبر أن

المجهولين $س$ و $ص$ كان مجموعهما يساوى ١ وحاصل ضربهما يساوى ٦ ويكون مقدار $س$ و $ص$ هما جذرا المعادلة

$$ع^2 - ع - ٦ = ٠ \quad (٥) \text{ وبحل هذه المعادلة نجد}$$

$$ع = ٠,٥ \pm ٢,٥ \text{ أى } ع = ٣ \text{ و } ع = ٢$$

ويكون أحد الجذرين مقدار $س$ والآخر مقدار $ص$ فاما أن يكون $س = ٣$ و $ص = ٢$ وبناء عليه يكون $ص = ٢$ واما أن يكون $س = ٢$ و $ص = ٣$ وبناء عليه يكون $ص = ٣$

(٢٢٦) الحالة الخامسة - اذا أريد حل المجموعة

$$س - ص = ٢٠ \quad (١)$$

$$س + ص = ١٠ \quad (٢)$$

يلاحظ أن معادلة (١) يمكن أن تكتب هكذا (س + ص)

(س - ص) = ٢٠ (٢) وبقسمة طرفي هذه المعادلة على

طرفي معادلة (٢) ينتج س - ص = ٢ (٤)

ثم يكون من معادلتى (١) و (٤) مجموعة بحلها نجد س

$$= ٦ \text{ و } ص = ٤$$

(٢٢٧) تنبيه يمكن حل هذه المجموعات انحصورية بطريقة

مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى

(٢٢٨) حل مجموعة معادلتين كلاهما بدرجة ثانية - نحل

هذه المجموعة بطريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى غير أنه بعد حذف أحد المجهولين اذ لم تتوصل الى معادلة من المعادلات التي سبق الكلام على حلها (كأن وجدت بدرجة رابعة واشتملت على المجهول بدرجات ثالثة وثانية وأولى) فلا يمكن الحل بواسطة ما تقدم وانما تحل بواسطة قواعد مقرره في علم الجبر العالي

المثال الاول - اذا أريد حل المجموعة

$$(1) \quad 2س + 3ص = 77$$

$$(2) \quad 3س - 2ص = 66$$

تُحذف المجهول ص بطريقة الجمع أو الطرح فينتج ١١ س = ٢٧٥ ومنها س = ٢٥

فاذا وضع بدلا عن س مقداره ٥٥ في معادلة (١) ينتج

$$٢٥ + ٣ص = 77 \quad (3) \quad \text{ومنها } ص = 16$$

فيكون س = ٥٥ ص = ١٦ أو س = ٥٥ ص = ٣

واذا وضع بدلا عن س مقداره الثاني - ٣ في معادلة (٢)

ينتج المعادلة (٣) عنها ويكون س = ٥٥ ص = ٣

$$\text{أو } س = ٥٥ ص = ٣$$

المثال الثاني اذا أريد حل المجموعة

$$(1) \quad 4س + 3ص = 66 \quad 3س + 4ص = 66$$

$$(2) \quad 4س + 3ص = 66 \quad 3س + 4ص = 66$$

نضرب بطرق معادلة (١) في ٣ ثم نطرح من الناتج معادلة (٢)

فينتج \cdot $\text{س}^2 - ١٤ \text{س} + \text{س} + \text{س} - ٤ \text{س} + ٥ \text{س} = ٨٧ + ٠ = (٣)$
 ثم نستخرج من هذه المعادلة مقدار س بفرض أن س معلوم فينتج
 $\text{س} = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - ٤ \text{س} + ٨٧}{٥ + \text{س} + ١٤} (٤)$ ثم نستعويض المجهول س في
 معادلة (١) بمقداره من معادلة (٤) فينتج

$$\text{س}^2 + \left(\frac{\text{س}^2 + \text{س} - ٤ \text{س} + ٨٧}{٥ + \text{س} + ١٤} \right) - \frac{\text{س}^3 + \text{س}^2 - ٤ \text{س} + ٨٧}{٥ + \text{س} + ١٤} + \text{س} = ٦ + \frac{\text{س}^2 + \text{س} - ٤ \text{س} + ٨٧}{٥ + \text{س} + ١٤}$$

ويحذف المقامات والاختصار يحدث

$$١٥٥ \text{س}^2 + ١٤٧ \text{س} - ٢٢٤٤ \text{س}^2 - ٢ - ٩٨٢ \text{س} = ٧٢٨٤ + (٥) \cdot$$

وحيث ان هذه المعادلة (٥) بدرجة رابعة ومشتلة على المجهول
 س بدرجات ثالثة وثانية وأولى فلا يمكن حلها بواسطة ما تقدم
 من القواعد

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

$$(٢٤٨) \text{س} + \text{س} = ٧,٥ (٢٤٩) \text{س} + \text{س} = ٥ + ٤ \text{س} = ٢٢$$

$$\text{س} = ١٤ \text{س} = ٦$$

$$(٣٥٠) \text{س} - \text{س} = ٢ (٣٥١) \text{س} - \text{س} = ٥$$

$$\text{س} = ٦٣ \text{س} = ٤٢$$

$$(٣٥٢) \text{س} - ٢ \text{س} = ٠ (٣٥٣) \text{س} - ٢ \text{س} = ١١$$

$$\text{س} = ١٣,٥ \text{س} = ٣$$

$$(٢٥٤) \text{ صه } + \text{ صه } = ٧ (٢٥٥) \text{ صه } + ٢ \text{ صه } + ٢ \text{ صه } = ١٤$$

$$\text{صه } + \text{ صه } = ٢٥ \quad \text{صه } + ٩ \text{ صه } = ١٤٨$$

$$(٢٥٦) \text{ صه } - \text{ صه } = ٢ (٢٥٧) \text{ صه } - \text{ صه } = ١٠$$

$$\text{صه } + \text{ صه } = ١٢,٥ \quad \text{صه } + \text{ صه } = ١١,٥٧٥$$

$$(٢٥٨) \text{ صه } - \text{ صه } = ٥٦ (٢٥٩) \text{ صه } - \text{ صه } = ٢٥$$

$$\text{صه } + \text{ صه } = ١٤ \quad \text{صه } + \text{ صه } = ٧$$

$$(٢٦٠) \text{ صه } + \text{ صه } = ١٤,٥ (٢٦١) \text{ صه } - \text{ صه } = ١٩$$

$$\text{صه } - \text{ صه } = ١٠ \quad \text{صه } + ٥ \text{ صه } = ٢٨$$

مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(٢٦٢) محيط غيظ مستطيل الشكل ٥٠٠ يارده ومساحته

١٤٤٠٠ يارده مربعه فما بعداه

(٢٦٣) الفرق بين ضلعي مستطيل ٥ أمتار ومساحته ٧٥٠ مترا

مربعه فما مقدار بعديه بالتر

(٢٦٤) مساحتا قطعتي أرض مربعتي الشكل ثلاثون فدانا

ومحيط الكبرى يزيد ثمانين قصبة عن محيط الصغرى فما مساحة

كل قطعة على حدها

(٢٦٥) ما طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية إذا كان طول

الوتر ١٠ أمتار والفرق بين الضلعين متران

(٢٦٦) مستقيم أ ب طوله ١٨ ستمتد بقسم إلى جزئين مختلفين

ثم أنشأ على كل منهما ما مربع فكانت مساحة أكبر المربعين تزيد

(٢ - ١٤)

عن مساحة أصغرهما ٧٢ منتترا مربعا فما مقدار كل من الجذرين
(٣٦٧) عددان لو أضيف ضعف مربع أصغرهما الى مربع
الاكبر كان الناتج ٦٦ واذا طرح ٣ أمثال مربع أصغرهما من
مربع الاكبر كان الناتج ٦١ فما هما العددان
(٣٦٨) مثلث قائم الزاوية مساحته ٧٢٦ مترا مربعا وطول وتره
٥٥ مترا فما طول ضلعي القائمة

(٣٦٩) محيط مربع يزيد عن محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة
الاكبر تزيد عن مساحة الاصغر ٣٢٥ قدما فما ضلع كل مربع
منهما

(٣٧٠) مستطيل مساحة ٧٥٠ مترا واذا زيد طوله مترا ونقص
عرضه مترا تزيد مساحته أربعة أمتار فما طوله وعرض هذا
المستطيل

(٣٧١) مستطيل مساحته ٣٠٠ متر مربع وقطره ٢٥ مترا
فما بعده

(٣٧٢) مربعان مجموع سطحيهما ٨٦٢١ وحاصل ضرب قطريهما
٨٥٤٠ فما طول ضلعيهما

بمداقّه وعنايته ووثيقه ورعايته قدّم كتاب القواعد
الجلية في الاعمال الجبرية مشتملا على التمارين العديدة
التدرجية والمسائل المتنوعة التطبيقية التي هي غاية هذا
العلم المفصولة ومضاته المشودة

وأرجو من يطلع فيه على زلة من الأصل أدهقوة من الطبع
أن يصلحها بفكره الثاقب ويجريها برأيه الصائب وليكن غرضه
المنفعة والإصلاح ما استطاع وما توفيقنا إلا بالله جعله الله
خالصاً لوجهه الكريم ونفعه النفع العيم والصلاة والسلام
على سيدنا محمد وآله مسك الختام

يقول المتوسل بحاجه النبي المصطفى خادم التصحيح
الفقيه إلى الله تعالى محمود مصطفى

حمد المن جبر كل كبير وحل كل معضل عسير وعلت الآؤمة عن
الوقوف عند حد وأفاض ضروب نعمائه على كل فرد وصلاة
وسلاماً على سيدنا محمد أس الكمال الحائر لأعلى رتب الجلال
والجلال المؤسسة قوانين نبوته على أوضح برهان وأحسن دلالة وعلى
آله وأصحابه الماحين بعوامهم أصول الضلالة أما بعد فقد تم طبع
الكتاب الشافي الذي هو بالمهم من الجبر وفي الجامع لفرائده
بأسلوب يقرب تناوله الشامل لفوائده بانعوج يسهل على الأفهام
تداوله المسمى بالقواعد الجلية في الأعمال الجبرية على تنقطة مؤلفه
الماهر المنطيق ذي التحقيق والتدقيق خدين كل وصف
نفيس حضرة محمد أفندي أدريس أدام الله سعده وقوى عزه
ومجده وذلك في المطبعة الزاهرة بيولا قمصر القاهرة في ظل
الحضرة البهية والطلعة السامية السنية رب السيف والقلم
حليف الحلم والحكم المحفوظ بالسبع المثاني أفندينا المعظم

(عباس باشا حلي الثاني) لازال متمتعاً بولي عهده شمس نساء محمده
 وسعدده ملحوظاً هذا الطبع الخليل والشكل الطريفة الخليل
 بتطور من عليه جميل أخلاقه يبقى حضرة وكيل المطبعة محمد بك حسني
 في أواسط شهر الله المعظم رجب الفرد الاصب الاضم
 من العام الثامن عشر بعد الثمانيه والالف من
 هجرة من خلقه الله على أكل
 وصف عليه الصلاة والسلام
 ملاح بدر عام وفاح
 مسك ختام

صواب الخطأ الذي وجد في كتاب القواعد الجلية في الاعمال الجبرية

صواب	خطأ	سطر	صفحة
٣	٢	٦	٤
٧٤	٧٢	٢١	٧
٣ ح و	٢ ح و	١٣	١٤
ايجاز	ايجاز	١٨	١٤
٥ هـ	٥ هـ	١٩	١٧
٣ ا ن	٣ ا ن	١	٢١
٣ ا ن	٣ ا ن	١١	٢١
٨ ا ن	٨ ا ن	١٩	٢٢
٥ س	١٥	٦	٢٤
٢ ا ن	٢ ا ن	١٢	٢٤
(ح - ز)	(ح - ز)	٥	٣٠
٧ ح و هـ	٧ ح و هـ	٥	٣٥
(ح + ز - هـ) ب	(ح + ز - هـ) ب	١٠	٣٧
- ١٥ ح و	- ١٥ ح و	١٨	٤٠
باسه	باس	٥	٤٢
٨ ح و	١٨ ح و	١١	٤٢
- سه ح	- سه ح	٢	٤٥
نصف وتضاف لتمرين ٧١	نفرض أن ح = ٤	١٨	٥١
+ ٧ ح و	- ٧ ح و	٩	٥٢

(ب)

صواب	خطأ	سطر	صفحة
٤ ٦ ٤	٤ ٦ ٤	٩	٥٢
٦ ٦	٦ ٦	١١	٥٢
٦ ٦ ٦	٦ ٦ ٦	١١	٥٢
٤ ٦ + ٦ ٦	٤ ٦ -	١٣	٥٢
٤ ٦ ٦	٤ ٦ ٦	١٦	٥٢
٤ ٦	٤ ٦	٩	٦٠
٤ ٦	٤ ٦	٧	٦٣
(٩٣) وهكذا باضافة	(٨٧) النمرة المتسلسلة	٧	٦٤
٦ الى كل نمرة	لمادة الكتاب وهكذا		
لغاية نمرة ١٠٧ نجعل	ما بعدها من النمر الى		
١١٣	١٠٧		
٤ ٦ + ٤ ٦ (في البسط والمقام)	٤ ٦ + ٤ ٦ (في البسط والمقام)	٥	٦٦
١٥٦	١٥١	٢١	٧٥
$\frac{١-٤}{٥}$	$\frac{١-٤}{٥}$	١٤	٧٨
$\frac{٤+٤}{٥}$	$\frac{٤-٤}{٥}$	١٥	٧٨
(٦ - ٦)	(٥ - ٦)	٢١	٨١
٢	٢٠	٩	٨٩
١٠ %	١٥ %	٩	٩٤
١٦	١٢	٩	٩٥
مجاهيل	مجاهيل	٩	١٠١
٥ -	٥ +	٥	١٠٥

(ج)

صواب	خطأ	سطر	مصفوفة
والمستقيمة	المستقيمة	١	١٢٧
٦٤	٦٠	١٩	١٢٥
١٧	٧	٢٠	١٢٥
مرفع - ١	مرفع + ١		
٣	٣	١	١٢٦
حرف	حرف		
٢٨	٢٨	٧	١٢٦



Bibliotheca Alexandrina



0573454